Примерный список задач по курсу **«Основы Высшей Математики»**
ИМО МИФИ, 1-й семестр, 2017/2018 уч. г.
Лектор — Д. С. Ткаченко

При ответе на каждый вопрос должны быть сформулированы все теоретические сведения, формулы и факты, необходимые для решения задачи.

1. Понятие неявной функции и ее графика. Нарисовать на плоскости (x, y) следующие множества точек:
$$\text{а)}\quad x^2+y^2=4, \qquad \text{б)}\quad x^2+y^2=4x, \qquad \text{в)}\quad x^2+y^2=4x+4y-4.$$
2. Каноническое уравнение эллипса. Нарисовать на плоскости (x, y) следующие множества точек:
$$\text{а)}\quad \frac{x^2}{4}+y^2=1, \qquad \text{б)}\quad 2x^2+3y^2=12, \qquad \text{в)}\quad 1\leqslant x^2+\frac{y^2}{9}\leqslant 9.$$
3. Функция $y=|x|$ и ее свойства. Построить графики:
$$y=x+|x|, \qquad y=x|x|, \qquad y=\frac{x}{|x|}, \qquad y=\frac{x^2}{|x|}\ .$$
4. Нарисовать на плоскости (x, y) график уравнения $|x|+|y|=a$ с параметром $a>0$.
5. График квадратичной функции. Построить графики:
$$y=x^2+2x, \qquad y=|x^2+2x|, \qquad y=x^2+2|x|, \qquad |y|=x^2+2x.$$
6. Функция $y=e^x$ и ее график. Построить графики гиперболических функций $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус), $y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус). Доказать гиперболические тождества:
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \qquad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x, \qquad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x.$$
7. Основные тригонометрические функции и их графики. Для функции $y=\sin(1/x)$, $x\neq 0$, найти точки максимумов, минимумов, нули и построить примерный график.
8. Основные тригонометрические соотношения. Построить графики $y=2\sin x\cos x$, $y=2\cos^2 x$.
9. Различные формы записи комплексного числа и их геометрический смысл. Указать на комплексной плоскости следующие множества точек:
$$M_1=\{z:\ \operatorname{Re}(iz)\leqslant -2\}, \quad M_2=\{z:\ |z+1+i|\leqslant 1\}, \quad M_3=\{z:\ |z-2|=|z+2i|\}.$$
10. Модуль и аргумент комплексного числа. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:
$$z_1=\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}, \quad z_2=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}, \quad z_3=\frac{1+\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7)}{1+\cos(\pi/7)-i\sin(\pi/7)}.$$
11. Формула Муавра. Вычислить $(\sqrt{3}-i)^{20}$, $(1+i)^{50}$. Представить ответы в тригонометрической и алгебраической формах.
12. Показательная форма комплексного числа. Записать в показательной форме:
$$z_1=3i, \quad z_2=(3i)^{11}, \quad z_3=3+3i, \quad z_4=-3e^{3i}, \quad z_5=\frac{i}{3-3i}.$$
13. Равные векторы, их геометрическая интерпретация. В параллелограмме $ABCD$ даны три вершины $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$. Определить координаты четвертой вершины D.
14. В пространстве даны два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 суть точки пересечения диагоналей. Доказать, что
$$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}\right).$$
15. Точка M есть точка пересечения медиан в треугольнике ABC. Доказать, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. (Указание: точка M делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.)

16. Понятия коллинеарных и неколлинеарных векторов. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные векторы на плоскости. Нарисовать множество всех векторов вида $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$, где $\alpha + \beta = 1$.
17. Скалярное произведение и его свойства. С помощью скалярного произведения доказать тождество: $|\vec{a} + \vec{b}\,|^2 + |\vec{a} - \vec{b}\,|^2 = 2\left(|\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2\right)$. Объяснить его геометрический смысл.
18. В треугольнике ABC проведена высота BH. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE. Выразить вектор $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.
20. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ – неколлинеарные векторы на плоскости (координаты декартовы). Доказать, что площадь параллелограмма, образованного этими векторами вычисляется по формуле $S = |a_1b_2 - a_2b_1|$.
21. Векторное произведение и его свойства. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}\,] = [\vec{b}, \vec{c}\,] = [\vec{c}, \vec{a}\,]$.
22. Геометрический смысл смешанного произведения. При помощи смешанного произведения найти значение $d \in \mathbb{R}$, при котором точка $D(1, 2, d)$ принадлежит плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 4, 5)$.
23. Показать, что координаты вектора $\vec{r}$ относительно произвольного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ выражаются равенствами:

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{r}, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\vec{e}_1, \vec{r}, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r})}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}.$$

Как преобразуются эти формулы, если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют декартов базис?
24. Свойства определителя третьего порядка. Используя свойства определителя, доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

25. Общее уравнение плоскости. Составить уравнение плоскости, если заданы две симметрично расположенные относительно нее точки $M_1(a_1, b_1, c_1)$ и $M_2(a_2, b_2, c_2)$.
26. Найти объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{где} \quad ABCD \neq 0.$$

27. В пространстве даны два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Указать геометрическое место точек $M(x, y, z)$, определяемых уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответить на тот же вопрос, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
28. Различные способы задания прямой в пространстве. Записать в параметрическом виде прямую, заданную общим уравнением:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z + 5 = 0, \\ x - 2y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $x + y + z + 1 = 0$.
29. Формула расстояния от точки до плоскости. Найти расстояние между параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $Ax + By + Cz + D_1 = 0$.
30. Найти расстояние между прямыми:

а) l_1: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = t$ и l_2: $x = -t$, $y = 1 + t$, $z = -1 - t$ $(t \in \mathbb{R})$;

б) l_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z + 1}{-2}$ и l_2: $\dfrac{x + 1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 3}{1}$.

В чем принципиальная разница между этими случаями?
31. В тетраэдре $ABCD$ с вершинами $A(1, 1, -1)$, $B(0, 2, 3)$, $C(-1, 0, -3)$, $D(6, -9, 0)$ из точки D на основание ABC опущена высота DH. Составить параметрическое уравнение этой высоты. Найти координаты точки H и расстояние DH.
32. В пространстве заданы прямые l_1: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = t$ и l_2: $x = -t$, $y = -3 - t$, $z = -1 - t$ $(t \in \mathbb{R})$. Показать, что они пересекаются. Найти точку пересечения.
33. Понятие предела последовательности. Дать определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \neq 5, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \neq +\infty.$$

Привести пример последовательности на каждую из перечисленных ситуаций.

34. Понятие точки разрыва. Классификация изолированных точек разрыва. Определить характер точки разрыва у функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}$.

35. Дать определение производной функции в точке. Показать, что функция

$$y = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не имеет производной в точке $x = 0$.

36. Таблица производных от основных элементарных функций. Используя таблицу и правила дифференцирования вычислить производные:

$\left(x\sqrt{x}\right)'$, $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'$, $\left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right)'$, $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}\right)'$, $\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)'$, $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'$, $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$, $\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'$, $\left(\dfrac{e^{2x}}{x}\right)'$, $\left(e^{3x}\sin 2x\right)'$, $\left(3^{x^2}\right)'$, $\left(\operatorname{tg}^2 x\right)'$, $(\ln\cos x)'$, $(\ln\operatorname{ctg} x)'$, $\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)'$, $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'$, $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'$, $\left(\cos(\sin(e^{\operatorname{tg} x}))\right)'$, $\left(x^{-x}\right)'$, $\left((\sin x)^{\cos x}\right)'$.

37. Вычислить производные и проделать все упрощения:

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right), \quad y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$$

38. Понятие о логарифмическом дифференцировании. Вычислить производные:

$$y = x^{x^2}, \qquad y = x^{2^x}, \qquad y = 2^{x^x}.$$

Какая из перечисленных функций быстрее возрастает?