

Занятие 3 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

1) Вычислить:

$$(a) \frac{3i}{1-i}, \quad (б) \frac{1+2i}{2-i}, \quad (в) \frac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}, \quad (г) i+i^2+i^3+\dots+i^{15},$$
$$(д) i - \frac{1}{i - \frac{1}{i}}, \quad (е) z + \bar{z}, \text{ где } z = \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha}.$$

Отв: (а) $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, (б) i , (в) $-m + ni$, (г) -1 , (д) $\frac{5}{3}i$, (е) $2 \cos \alpha$.

2) Изобразить на плоскости:

$$(a) \operatorname{Im} z = -3, \quad (б) \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z, \quad (в) \arg z = \frac{\pi}{4}, \quad (г) |z+1| = 1,$$
$$(д) 2 < |z-2i| < 4, \quad (е) |z-1| = |z-i|.$$

3) Представить в тригонометрической форме:

$$(a) 3i, \quad (б) -2+2i, \quad (в) 4-4\sqrt{3}i, \quad (г) 1-\sqrt{3}, \quad (д) \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3},$$
$$(е) \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}, \quad (ё) 1 + i \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

4) Возвести в степень:

$$(a) (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^8, \quad (б) \left(\sqrt{2}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) \right)^6, \quad (в) (2+2i)^5,$$
$$(г) (1-i)^{100}, \quad (д) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{100}.$$

Отв: (а) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (б) $-4 + 4\sqrt{3}i$, (в) $-128 - 128i$, (г) -2^{50} , (д) 1 .

5) Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-10| \leq 8$, найти то, аргумент которого имеет наибольшее возможное значение.

Отв: $z = \frac{18}{5} + \frac{24}{5}i$.

Д/з 3

1) Доказать равенства $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

2) Вычислить:

(а) $\frac{5 + 3i}{2 + i}$, (б) $\frac{(3 + 4i)(-1 + 3i)}{6 - 8i}$, (в) $\frac{i^{13} - i^{14}}{1 + i^{15}} + i^{10}$, (г) $\frac{1 + i}{1 + 2i} + \frac{1 - i}{1 - 2i}$,

(д) $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$.

отв: (а) $\frac{13}{5} + \frac{i}{5}$, (б) $-\frac{13}{10} - \frac{9i}{10}$, (в) $-1 + i$, (г) $\frac{6}{5}$, (д) $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$.

3) Изобразить на плоскости:

(а) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$, (б) $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$, (в) $|z + 2i| \leq 2$, (г) $|z| > |z - 2|$,
(д) $\operatorname{Re}((1 + i)z) \geq 0$.

4) Представить в тригонометрической форме:

(а) $-1 - i$, (б) $16 - 16\sqrt{3}i$, (в) $-\sqrt{5}i$, (г) $3 - \sqrt{10}$, (д) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$.

5) Возвести в степень:

(а) $(\sqrt{3} + i)^{30}$, (б) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}\right)^{30}$, (в) $(i^{23} - i^{24})^{40}$, (г) $\left(\frac{1 - i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n$.

отв: (а) -2^{30} , (б) $2^{15}i$, (в) 2^{20} , (г) $\cos(2n\alpha) - i \sin(2n\alpha)$.