Занятие 4 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

Тема занятия: действия с векторами[1]

761. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы:

$$\textbf{1)}\ \vec{a}+\vec{b};\quad \textbf{2)}\ \vec{a}-\vec{b};\quad \textbf{3)}\ \vec{b}-\vec{a};\quad \textbf{4)}\ -\vec{a}-\vec{b}.$$

773. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ даны векторы, совпадающие с ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$. Построить следующие векторы:

$$\textbf{1)}\ \vec{m}+\vec{n}+\vec{p};\quad \textbf{2)}\ \vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p};\quad \textbf{3)}\ \frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p};\quad \textbf{4)}\ \vec{m}+\vec{n}-\vec{p};\quad \textbf{5)}\ -\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}.$$

729. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(3;\ -1;\ 6)$, $A_2(-1;\ 7;\ -2)$, $A_3(1;\ -3;\ 2)$ является прямоугольным.

735. Даны вершины треугольника $M_1(3;\ 2;\ -5)$, $M_2(1;\ -4;\ 3)$, $M_3(-3;\ 0;\ 1)$. Найти середины его сторон.

Ответ: $(2;\ -1;\ -1)$, $(-1;\ -2;\ 2)$, $(0;\ 1;\ -2)$.

765. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60°$, причем $|\vec{a}\,|=5$ и $|\vec{b}\,|=8$. Найти величины $|\vec{a}+\vec{b}\,|$ и $|\vec{a}-\vec{b}\,|$.

Ответ: $|\vec{a}+\vec{b}\,|=\sqrt{129}$, $|\vec{a}-\vec{b}\,|=7$.

777. Пусть $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\,\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\,\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$. Определить, при каких значениях α, β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Ответ: $\alpha=4$, $\beta=-1$.

781. Найти орт вектора $\vec{a}=\{3;\ 4;\ -12\}$.

Ответ: $\vec{e}=\left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ -\frac{12}{13}\right\}$.

787. На плоскости даны два вектора $\vec{p}=\{2;\ -3\}$, $\vec{q}=\{1;\ 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a}=\{9;\ 4\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

Ответ: $\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$.

789. Даны три вектора $\vec{a}=\{3;\ -1\}$, $\vec{b}=\{1;\ -2\}$, $\vec{c}=\{-1;\ 7\}$. Определить разложение вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Ответ: $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

771. Пусть O – точка пересечения медиан в треугольнике ABC. Доказать, что

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0.$$

[1]Задачи взяты из книги **Д.В. Клетеник** *Сборник задач по аналитической геометрии*//Санкт-Петербург, Специальная литература, 1998.

Д/з 5   для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

766. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причем $|\vec{a}\,| = 3$ и $|\vec{b}\,| = 5$. Найти величины $|\vec{a} + \vec{b}\,|$ и $|\vec{a} - \vec{b}\,|$.

Ответ: $|\vec{a} + \vec{b}\,| = \sqrt{19}, \quad |\vec{a} - \vec{b}\,| = 7.$

770. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить следующие векторы:

$$\textbf{1)}\ \frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}; \quad \textbf{2)}\ \frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}; \quad \textbf{3)}\ \frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}; \quad \textbf{4)}\ -\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}.$$

Принимая в качестве масштабной единицы $\frac{1}{2}\,|\vec{n}\,|$, построить также векторы:

$$\textbf{5)}\ |\vec{n}\,|\,\vec{m} + |\vec{m}\,|\,\vec{n}; \quad \textbf{6)}\ |\vec{n}\,|\,\vec{m} - |\vec{m}\,|\,\vec{n}.$$

776. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{b} = \{-6;\ 3;\ -9\}$. Установить, какой из них длиннее, во сколько раз, и как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

Ответ: Вектор $\vec{b}$ длиннее вектора $\vec{a}$ в 3 раза. Они направлены в противоположные стороны.

778. Проверить, что четыре точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$, $D(3;\ -5;\ 3)$ служат вершинами трапеции.

784. Два вектора $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 6\}$ и $\vec{b} = \{-1;\ 2;\ -2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектриссе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}\,| = 3\sqrt{42}$.

Ответ: $\vec{c} = \{-3;\ 15;\ 12\}.$

788. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3;\ -2\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 1\}$ и $\vec{c} = \{7;\ -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Ответ: $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}.$

736. Даны вершины треугольника $A(2;\ -1;\ 4)$, $B(3;\ 2;\ -6)$, $C(-5;\ 0;\ 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

Ответ: 7.