Занятие 5 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

Тема занятия: скалярное произведение

795. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}\,| = 3$ и $|\vec{b}\,| = 4$, вычислить: **1)** $\vec{a}\,\vec{b}$; **2)** $\vec{a}^{\,2}$; **3)** $\vec{b}^{\,2}$; **4)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; **5)** $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$; **6)** $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; **7)** $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$.

797. Доказать справедливость тождества $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 2\,(a^2+b^2)$ и выяснить его геометрический смысл.

807. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD, по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$.

817. Даны четыре точки: $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ -9)$ и $D(-5;\ 5;\ 3)$. Доказать, что отрезки AC и BD взаимно перпендикулярны.

753. Дан модуль вектора $|\vec{a}\,| = 2$ и углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Вычислить проекции вектора на координатные оси.

754. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{12;\ -15;\ -16\}$.

756. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

$$\textbf{1)}\ \ \alpha = 45°,\ \ \beta = 60°,\ \ \gamma = 120°; \quad \textbf{2)}\ \ \alpha = 45°,\ \ \beta = 135°,\ \ \gamma = 60°;$$

$$\textbf{3)}\ \ \alpha = 90°,\ \ \beta = 150°,\ \ \gamma = 60° \text{ ?}$$

829. Найти проекцию вектора $\vec{s} = \{4;\ -3;\ 2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

831^M. Даны точки $A(3;\ -2;\ -4)$, $B(2;\ -2;\ 5)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$, а с осью Oz – тупой угол γ.

833. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.
Вычислить $\mathbf{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

825. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}\,| = 14$.

758. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120°$ и $\gamma = 45°$. Какой угол он составляет с осью Oy?

Ответы

795. **1)** -6; **2)** 9; **3)** 16; **4)** 13; **5)** -61; **6)** 37; **7)** 73. **807.** $\overrightarrow{BD} = \dfrac{(\vec{b},\,\vec{c})}{c^2}\,\vec{c} - \vec{b}$.
753. $X = \sqrt{2}$, $Y = 1$, $Z = -1$. **754.** $\cos\alpha = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = -\frac{3}{5}$; $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.
756. **1)** Может. **2)** Не может. **3)** Может. **829.** $\sqrt{3}$. **831^M.** -5. **833.** -4.
825. $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$. **758.** $60°$ или $120°$.

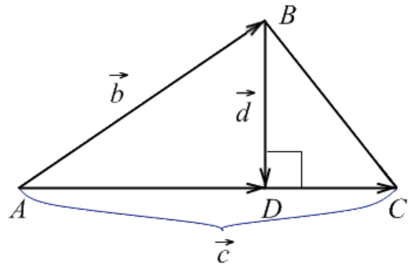
807.

Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD, по базису $\vec{b},\ \vec{c}$.

Решение.

Разложить вектор $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$ по базису $\left\{\vec{b},\ \vec{c}\right\}$ означает найти такие числа α и β, чтобы выполнялось равенство

$$\boxed{\vec{d} = \alpha\,\vec{b} + \beta\,\vec{c}.} \tag{1}$$



Для упрощения дальнейшего решения полезно заметить, что так как точка D лежит на прямой AC, то $\overrightarrow{AD} \parallel \vec{c}$, то есть $\exists\,\gamma$:

$$\overrightarrow{AD} = \gamma\vec{c}. \tag{2}$$

Так как

$$\vec{d} = \overrightarrow{AD} - \vec{b},$$

то с учётом (2) из (1) получаем

$$\boxed{\vec{d} = -\,\vec{b} + \gamma\vec{c},} \qquad \text{т.е.}\ \ \alpha = -1,\ \ \beta = \gamma. \tag{3}$$

До сих пор мы использовали только тот факт, что точка D лежит на прямой AC.

Осталось использовать условие $\overrightarrow{BD} \perp AC$. Из него следует, что векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны, а это равносильно тому, что

$$\big(\vec{d},\ \vec{c}\big) = 0. \tag{4}$$

Подставляя $\vec{d}$ из (3) в (4), получаем:

$$\big(\vec{d},\ \vec{c}\big) = \big(-\vec{b} + \gamma\vec{c},\ \vec{c}\big) = -\big(\vec{b},\ \vec{c}\big) + \gamma\big(\vec{c},\ \vec{c}\big) = 0,$$

откуда можно выразить γ:

$$\boxed{\gamma = \frac{\big(\vec{b},\ \vec{c}\big)}{c^2}.}$$

Подставив найденное γ в (3), получаем

Ответ: для вектора $\overrightarrow{BD}$ справедливо разложение

$$\vec{d} = -\,\vec{b} + \frac{\big(\vec{b},\ \vec{c}\big)}{c^2}\,\vec{c}.$$

по базису $\left\{\vec{b},\ \vec{c}\right\}$.