

Занятие 6 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

Тема занятия: определители

1) Вычислить определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} x & iy \\ iy & x \end{vmatrix}, \quad \text{г) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

2) Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & \text{б) } & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, & \text{в) } & \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}, & \text{г) } & \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}, \\ \text{д) } & \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & c \\ b & a & 0 \end{vmatrix}, & \text{е) } & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix}, & \text{ж) } & \begin{vmatrix} x & x & x \\ y & -y & y \\ z & 2z & 3z \end{vmatrix}, & \text{з) } & \begin{vmatrix} i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3) Показать, что следующие определители равны нулю:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & x \\ y & y & y \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 & c_2 & c_1 + c_2 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}, \quad \text{г) } \begin{vmatrix} a & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ a & \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ a & \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

4) Указать значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых определитель равен нулю:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}, \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Вычислить определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Ответы.

1) а) -2 , б) -1 , в) $x^2 + y^2$, г) $\cos 2\alpha$.

2) а) 0 , б) -2 , в) adf , г) $-abd$, д) $2abc$, е) 0 , ж) $-4xyz$, з) $2i$.

3) а), б), в), г) $\Delta = 0$.

4) а) $\lambda = 1$, б) $\lambda_{1,2} = \pm i$, в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$, г) $\forall \lambda$.

5) $\Delta = (y - x)(z - x)(z - y)$.

Д/з 8 для групп Д1-01, Д1-02, Д1-03, Д1-04

1204. Вычислить определитель:

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \quad 5) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad 7) \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} \quad 8) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Ответ: 1) 18; 2) 10; 3) 0; 4) -50; 5) 0; 6) $x_2 - x_1$; 7) 0; 8) 1.

1205 (3, 4). Решить уравнения:

$$3) \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad 4) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

Ответ: 3) $x_1 = -1, x_2 = -4$; 4) $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{3}$.

Вычислить определители:

1211.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Ответ: -12.

1212.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ответ: 29.

1214.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ответ: 0.

1215.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Ответ: -29.

1216.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: $2a^3$.

1229.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: $2a^2b$.

1230.

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: $\sin 2\alpha$.

1231.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

Ответ: $xyz(y-x)(z-x)(z-y)$.

1232.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Ответ: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.