Занятие 7 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

Тема занятия: векторное произведение

<u>865.</u> Определить, является ли тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой или левой, если

1) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$; 3) $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{k}$; 5) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{j}$;

2) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}$; 4) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$; 6) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

I. Вычислить координаты векторного произведения $[\,\vec{a},\ \vec{b}\,]$, если:

а) $\vec{a}=\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}=\{0;\ 1;\ 0\}$; **д)** $\vec{a}=\{1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{b}=\{0;\ 1;\ 0\}$;

б) $\vec{a}=\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}=\{0;\ 0;\ 1\}$; **е)** $\vec{a}=\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}=\{1;\ 0;\ -3\}$;

в) $\vec{a}=\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}=\{4;\ 5;\ 6\}$; **ж)** $\vec{a}=\{-2;\ 0;\ 2\}$, $\vec{b}=\{1;\ 2;\ 3\}$;

г) $\vec{a}=\{4;\ 5;\ 6\}$, $\vec{b}=\{1;\ 2;\ 3\}$; **з)** $\vec{a}=\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}=\{2;\ 4;\ 6\}$;

<u>851.</u> Даны точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Найти координаты векторных произведений:

$$\textbf{1)}\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right], \qquad \textbf{2)}\ \left[\overrightarrow{BC}-2\,\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right].$$

<u>857.</u> Даны точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

<u>861.</u> Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}=\{8,\ -15,\ 3\}$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{m}|=51$, найти его координаты.

<u>841.</u> Даны: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}\,|=26$ и $\left|[\vec{a},\ \vec{b}]\right|=72$. Вычислить $(\vec{a},\ \vec{b}\,)$.

<u>843.</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}\,|=1$, $|\vec{b}\,|=2$, вычислить:

$$\textbf{1)}\ [\vec{a},\ \vec{b}]^2, \quad \textbf{2)}\ \left[(2\vec{a}+\vec{b}\,),\ (\vec{a}+2\vec{b}\,)\right]^2, \quad \textbf{3)}\ \left[(\vec{a}+3\vec{b}\,),\ (3\vec{a}-\vec{b}\,)\right]^2.$$

<u>845.</u> Доказать тождество $[\vec{a},\ \vec{b}]^2+(\vec{a},\ \vec{b}\,)^2=\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2}$.

II. Даны точки $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 2)$ и $C(3;\ 2;\ 3)$. Вычислить площади всех трёх параллелограммов, имеющих вершины в этих точках. Объяснить результат.

Ответы

№ 865. 1) правая, 2) левая, 3) левая, 4) правая, 5) векторы компланарны, 6) левая.
I. а) $\{0;\ 0;\ 1\}$, б) $\{0;\ -1;\ 0\}$, в) $\{-3;\ 6;\ -3\}$, г) $\{3;\ -6;\ 3\}$, д) $\{-1;\ 0;\ 1\}$, е) $\{3;\ 5;\ 1\}$, ж) $\{-4;\ 8;\ -4\}$, з) $\{0;\ 0;\ 0\}$.
№ 851. 1) $\{6;\ -4;\ -6\}$, 2) $\{-12;\ 8;\ 12\}$.
№ 857. 14.
№ 861. $\{45;\ 24;\ 0\}$.
№ 841. ± 30.
№ 843. 1) 3, 2) 27, 3) 300.
II. $S=\sqrt{11}$ для всех параллелограммов.

Д/з 9   для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

<u>842.</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 4$, вычислить:

$$\mathbf{1)}\quad \left|\left[(\vec{a}+\vec{b}\,),\ (\vec{a}-\vec{b}\,)\right]\right|, \qquad \mathbf{2)}\quad \left|\left[(3\vec{a}-\vec{b}\,),\ (\vec{a}-2\vec{b}\,)\right]\right|.$$

<u>Ответ:</u> **1)** 24, **2)** 60.

<u>844.</u> Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

<u>Ответ:</u> векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть коллинеарны.

<u>848.</u> Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Доказать, что

$$[\vec{a},\ \vec{b}\,] = [\vec{b},\ \vec{c}\,] = [\vec{c},\ \vec{a}\,].$$

<u>850.</u> Даны векторы $\vec{a} = \{3;\ -1;\ -2\}$ и $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -1\}$; Найти координаты векторных произведений:

$$\mathbf{1)}\ [\vec{a},\ \vec{b}\,], \qquad \mathbf{2)}\ [2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}\,], \qquad \mathbf{3)}\ [2\vec{a}-\vec{b},\ 2\vec{a}+\vec{b}\,].$$

<u>Ответ:</u> **1)** $\{5;\ 1;\ 7\}$, **2)** $\{10;\ 2;\ 14\}$, **3)** $\{20;\ 4;\ 28\}$.

<u>858.</u> Даны вершины треугольника $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$ и $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

<u>Ответ:</u> 5.

<u>860.</u> Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4,\ -2,\ -3\}$ и $\vec{b} = \{0,\ 1,\ 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

<u>Ответ:</u> $\{-6;\ -24;\ 8\}$.

<u>862.</u> Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2,\ -3,\ 1\}$ и $\vec{b} = \{1,\ -2,\ 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right) = 10$.

<u>Ответ:</u> $\{7;\ 5;\ 1\}$.

<u>864.</u> Даны векторы $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c} = \{1;\ 2;\ 3\}$. Вычислить:

$$\mathbf{1)}\quad \left[[\vec{a},\ \vec{b}\,],\ \vec{c}\,\right], \qquad \mathbf{2)}\quad \left[\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}\,]\right].$$

<u>Ответ:</u> **1)** $\{-7;\ 14;\ -7\}$, **2)** $\{10;\ 13;\ 19\}$.