

Занятие 8 для групп ИМО – 1 семестр (Б17-801)

Тема занятия: смешанное произведение

873. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$ и $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ответ: -7 .

867. Вектор \vec{c} перпендикулярен к векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ответ: ± 27 . Знак «+» – если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, знак «-» – если левая.

869. Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

874. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

1) $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$ и $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$;

2) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$ и $\vec{c} = \{3; -1; -2\}$;

3) $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$ и $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$.

Ответ: 1) компланарны; 2) не компланарны; 3) компланарны.

I. $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 3)$, $C(\lambda; 0; \lambda)$, $D(4; 3; 2)$. При каком значении $\lambda \in \mathbb{R}$ точки A, B, C, D находятся в одной плоскости?

Ответ: $\lambda = 3/2$.

876. Вычислить объём тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

Ответ: 3 .

877. Даны вершины тетраэдра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

Ответ: 11 .

878. Объём тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках

$$A(2; 1; -1), \quad B(3; 0; 1), \quad C(2; -1; 3).$$

Найти координаты четвёртой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

Ответ: $(0; 8; 0)$ или $(0; -7; 0)$.

II. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{a} = \{\alpha; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; \alpha; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; \alpha\}$ образуют правую тройку? левую тройку? компланарны?

Ответ: при $\alpha \in (-2, 1) \cup (1, \infty)$ правая тройка; при $\alpha \in (-\infty, -2)$ левая тройка; при $\alpha = -2$ векторы компланарны; при $\alpha = 1$ векторы совпадают.

Д/з 10 для групп Д1-01, Д1-02, Д1-03, Д1-04

866. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ответ: 24.

874^M. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, если

- 1) $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 1\}$;
- 2) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{0; -1; -2\}$;
- 3) $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 0\}$;
- 4) $\vec{a} = \{1; 2; 2007\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 2008\}$, $\vec{c} = \{0; 0; 1\}$.

Ответ: 1) -2; 2) -3; 3) -6; 4) 0.

870. Доказать, что равенство $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ справедливо при любых числах λ и μ .

I. $A(2; 0; 1)$, $B(1; -1; 1)$, $C(-1; -2; -1)$, $D(0; 0; \lambda)$. При каком значении $\lambda \in \mathbb{R}$ точка D находится в плоскости треугольника ABC ?

Ответ: $\lambda = -3$.

II. Вычислить объём тетраэдра, образованного точками $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(4; 5; 6)$.

Ответ: $15/2$ ед³.

III. Повторение

$A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 3; 2)$. В треугольнике ABC найти вектор высоты \overrightarrow{BH} , опущенной из вершины B на сторону AC .

Ответ: $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{9} \{-10; 2; -7\}$ (см. формулу в задаче 807 из занятия 7).

IV. При каких значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{a} = \{\lambda; 3; 3\}$, $\vec{b} = \{3; \lambda; 3\}$, $\vec{c} = \{3; 3; \lambda\}$ образуют правую тройку? левую тройку? компланарны?

Ответ: при $\lambda \in (-6, 3) \cup (3, \infty)$ правая тройка; при $\lambda \in (-\infty, -6)$ левая тройка; при $\lambda = -6$ векторы компланарны; при $\lambda = 3$ векторы совпадают.