Оглавление

Введение
Основные понятия

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Рассматриваются только *линейные уравнения*, т.е. уравнения, в которые неизвестные функции входят линейно.

Линейным интегральным уравнением Вольтерры 1-го рода называется уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad (0.1)$$

Здесь $y(x)$ – искомая функция, а $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, определенные соответственно в треугольнике $\Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$ и на отрезке $[a,b]$. Функция $K(x,t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (0.1), функция $f(x)$ называется *свободным членом* этого уравнения. *Решением* интегрального уравнения (0.1) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a,b]$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Уравнение Вольтерры (0.1) называется *однородным*, если $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$. В противном случае это уравнение называется *неоднородным*.

Линейным интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода называется уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt\,, \qquad (0.2)$$

где λ – числовой параметр.

Вопрос о существовании и единственности решения уравнений (0.1), (0.2) решается разными способами в зависимости от свойств ядра и свободного члена, а также от того, в каком классе функций ищется решение. Пусть функции $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения. При этом условии уравнение Вольтерры 2-го рода (0.2) имеет единственное решение при любом значении параметра λ в классе функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. В отличие от уравнений Вольтерры 2-го рода, решение уравнения Вольтерры 1-го рода (0.1) существует, когда свободный член $f(x)$ и ядро $K(x,t)$ удовлетворяют ряду дополнительных условий. Если функции $f(x)$ и $K(x,t)$ имеют непрерывные производные $f'(x)$ и $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(a) = 0$ и $K(x,x) \neq 0$ всюду на $[a,b]$, то уравнение (0.1) сводится к уравнению Вольтерры 2-го рода и, следовательно, имеет единственное непрерывное решение.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x), \qquad (0.3)$$

линейным интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода называется уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad (0.4)$$

В (0.3), (0.4) $y(x)$ – искомая функция; *ядро* $K(x,t)$ и *свободный член* $f(x)$ предполагаются заданными соответственно в квадрате $\Omega = \{a \le x, \ t \le b\}$ и на отрезке $[a,b]$; λ – числовой параметр.

Если $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$, то уравнение Фредгольма 2-го рода (0.3) называется *однородным*, в противном случае это уравнение называется *неоднородным*. *Решением* интегрального уравнения Фредгольма (0.3) или (0.4) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a,b]$, обращающая соответствующее уравнение в тождество.

Будем предполагать, что пределы интегрирования a и b в (0.3) и (0.4) – конечные числа, а функции $K(x,t)$ и $f(x)$ или непрерывны в своей области определения, или, в более общем случае, удовлетворяют условиям:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt = B_K^2 < +\infty, \qquad (0.5)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty. \qquad (0.6)$$

В отличие от уравнений Вольтерры 2-го рода, существование и единственность решения уравнения Фредгольма (0.3) существенно зависят от значения параметра λ (см., в частности, раздел 3 настоящей работы).

1. Интегральные уравнения Вольтерры

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (0.1):

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt. \qquad (1.1)$$

В некоторых случаях решение уравнение Вольтерры 2-го рода может быть сведено к решению некоторой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Укажем два способа, посредством которых это может быть сделано.

Случай 1. Если в исходном интегральном уравнении (1.1) ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ непрерывно дифференцируемы достаточное количество раз, то уравнение (1.1) может быть продифференцировано (один или несколько раз), что позволяет в ряде случаев свести его к задаче Коши для некоторого линейного дифференциального уравнения.

Пример 1.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \cos x + \int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt\,. \tag{1.2}$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение (1.2):

$$y\,'(x) = -\sin x + \int_0^x \cos\,(x-t)\ y(t)\,dt, \tag{1.3}$$

$$y\,''(x) = -\cos x + y(x) - \int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Исключая из уравнений (1.2), (1.4) интеграл $\int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt$, получим для искомой функции $y(x)$ дифференциальное уравнение $y''(x) = 0$, общее решение которого имеет вид $y(x) = C_1\,x + C_2$. Из (1.2) и (1.3) находим начальные условия:

$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Подставив общее решение в начальные условия, получим значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$. Следовательно, $y(x)\ \equiv 1$.

Рассмотренный прием всегда приводит к цели в том случае, когда ядро $K(x,t)$ имеет вид многочлена по степеням бинома $(x-t)$.

Пример 1.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\,y(t)dt. \tag{1.5}$$

Последовательно дифференцируя интегральное уравнение (1.5), получим

$$y\,'(x) = -\sin x - \int_0^x y(t)dt, \tag{1.6}$$

$$y\,''(x) = -\cos x - y(x). \tag{1.7}$$

Перепишем уравнение (1.7):

$$y\,''(x) + y(x) = -\cos x. \tag{1.8}$$

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 0{,}5\,x \sin x. \tag{1.9}$$

Начальные условия при $x = 0$ найдем из (1.5), (1.6):

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{1.10}$$

Подставив общее решение (1.9) в начальные условия (1.10), получим $C_1 = 1, C_2 = 0$, следовательно,

$$y(x) = \cos x - 0{,}5\, x \sin x,$$

что и является решением исходного интегрального уравнения.

Случай 2. Пусть исходное интегральное уравнение (1.1) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left(\sum_{k=1}^n a_k\,(x)\, b_k(t)\right) y(t)\, dt. \tag{1.11}$$

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1.11), представимое конечной суммой вида

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k\,(x)\, b_k(t), \tag{1.12}$$

называется *вырожденным* ядром (а уравнение (1.11) – *уравнением с вырожденным ядром*). Совокупность функций $\{a_k\,(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\,(x)\}_{k=1}^n$ будем считать состоящими из непрерывных и линейно независимых на отрезке $[a, b]$ функций. В противном случае, среди $\{a_k\,(x)\}_{k=1}^n$ (соответственно $\{b_k\,(x)\}_{k=1}^n$) можно выделить линейно независимую на отрезке $[a, b]$ систему функций и выразить через нее остальные функции. Запишем уравнение (1.11) следующим образом:

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n a_k\,(x) \int_a^x b_k(t)\, y(t)\, dt. \tag{1.13}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} &u_1(x) = \int_a^x b_1(t)\, y(t)\, dt\,, \\ &\ldots, \\ &u_n(x) = \int_a^x b_n(t)\, y(t)\, dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

После подстановки функций $u_k(x)$ (1.14) в (1.13) заключаем, что решение интегрального уравнения (1.13) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n a_k\,(x)\ u_k\,(x). \tag{1.15}$$

Дифференцируя соотношения (1.14) и подставляя вместо $y(x)$ выражения (1.15), получаем для неизвестных функций $u_k(x)$ систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &u'_1(x) = b_1(x) f(x) + b_1(x) \sum_{k=1}^n a_k\,(x)\ u_k\,(x), \\ &\ldots, \\ &u'_n(x) = b_n(x) f(x) + b_n(x) \sum_{k=1}^n a_k\,(x)\ u_k\,(x). \end{aligned}$$

Из (1.14) при $x = 0$ находим начальные условия: $u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(x) = 0$. Определив функции $u_k(x)$ и подставив их в (1.15), получим решение $y(x)$ интегрального уравнения (1.11).

Пример 1.3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 - \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} x} y(t)dt.$$

Полагая $u(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t\, y(t)\, dt$, получим

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x).$$

Следовательно,

$$u(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} t} u(t)\right) dt. \qquad (1.16)$$

Дифференцируя (1.16), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $u(x)$:

$$u'(x) = \operatorname{sh} x \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x)\right)$$

или

$$u'(x) + \operatorname{th} x\, u(x) = \operatorname{sh} x. \qquad (1.17)$$

Подстановка общего решения уравнения (1.17)

$$u(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} + C_1\right)$$

в начальное условие $u(0) = 0$, дает значение $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$u(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2 \operatorname{ch} x},$$

$$y(x) = 0{,}5\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right).$$

Варианты домашних заданий

Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению:

1.1 $y(x) = \frac{1}{1+x} + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

1.2 $y(x) = x\,e^{2x} + 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt.$

1.3 $y(x) = 2 - \int_0^x \frac{\sin t}{\cos x} y(t)dt.$

1.4 $y(x) = x^2 - 2\int_0^x \frac{t}{1+x^2} y(t)dt.$

1.5 $y(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)^2 - (x-t))\, y(t)dt.$

1.6 $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.7 $y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{-(x-t)}\, y(t)dt.$

1.8 $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

1.9 $y(x) = e^{-x}\cos x - \int_0^x e^{-(x-t)}\cos x\, y(t)dt.$

1.10 $y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.11 $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.12 $y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.13 $y(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)\, dt.$

1.14 $y(x) = \mathrm{ch}x - \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)y(t)dt.$

1.15 $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{ch}x} y(t)dt.$

1.16 $y(x) = x + \int_0^x (4\sin(x-t) - x + t)dt.$

1.17 $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{2\,t}{1+x^2} y(t)dt\ .$

1.18 $y(x) = -x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.19 $y(x) = e^x \sin 2x + 2\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)dt.$

1.20 $y(x) = (x - 3\cos x)(1 + 3\sin x) + 3\int_0^x e^{(x-t)} \sin x\ \ y(t)dt.$

1.21 $y(x) = -\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2} + \int_2^x (1+\ln x)\,\frac{y(t)}{t\ln t} dt.$

1.22 $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.23 $y(x) = xe^{3x} + 10\int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.24 $y(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{\cos x} - \int_0^x e^{(x-t)}\ \sin x\ \ y(t)dt.$

1.25 $y(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.26 $y(x) = (x^2 - 1)e^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\ \ y(t)dt.$

1.27 $y(x) = x^2(3\ln x - 1) + \int_2^x \frac{y(t)}{x\ln t}\, dt.$

1.28 $y(x) = e^x \cos 2x - 3\int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.29 $y(x) = \sin\frac{x}{2}\ \mathrm{tg}\ \frac{x}{2} + \int_{\frac{\pi}{3}}^x \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{t}{2}} y(t)dt.$

1.30 $y(x) = x\ln x\ 2^{x\ln x} + \int_2^x (1+\ln t)\,\frac{y(t)}{x\ln x}\, dt.$

2. Резольвента интегрального уравнения Вольтерры

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt\ . \qquad (2.1)$$

Ядро $K(x,t)$ непрерывно в $\Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$, свободный член $f(x)$ – на отрезке $[a,b]$. Предполагая, что λ фиксировано, будем искать решение (2.1) методом последовательных приближений, взяв, например, в качестве нулевого приближения $y_0(x) = f(x)$ (в качестве нулевого приближения $y_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию на отрезке $[a,b]$). Тогда получим

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, f(t) dt = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t)\ f(t)\, dt,$$

$K_1(x,t) = K\ (x,t)$;

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) y_1(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^x K(x,s)\Big(\int_a^s K_1(s,t) f(t) dt\Big) ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x \Big(\int_t^x K(x,s) K_1\ (s,t) ds\Big) f(t) dt\ =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K_2(x,t) f(t) dt,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,s) K_1(s,t) ds.$$

Аналогично устанавливается, что

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^x K_j(x,t) f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x \Big(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x,t)\Big) f(t) dt, \qquad (2.2)$$

где $K_1(x,t) = K\ (x,t)$,

$$K_j(x,t) = \int_t^x K(x,s) K_{j-1}(s,t) ds\,, \quad j = 2, 3, \ldots. \qquad (2.3)$$

Ядра $K_j(x,t)$называются *повторными* или *итерированными*.

Можно установить, что если ядро $K\ (x,t)$ непрерывно, то ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,t) \qquad (2.4)$$

при любых фиксированных значениях λ сходится (равномерно относительно $(x,t) \in \Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$) к некоторой функции $R\ (x,t,\lambda)$, называемой *резольвентой* ядра $K\ (x,t)$. Следовательно, соотношение (2.2) в пределе при $n \to \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda\,)\, f(t)\, dt, \qquad (2.5)$$

выражающую решение интегрального уравнения (2.1) через резольвенту.

<u>Пример 2.1.</u> Найти резольвенту $R\,(x,t,\lambda)$ ядра $K\,(x,t) = x$ и, используя ее, решить интегральное уравнение

$$y(x) = x^3 + \int_0^x x\, y(t)dt.$$

Из рекуррентных соотношений (2.3) получаем

$$K_1(x,t) = x,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds = \int_t^x x\,s\,ds = x\,\frac{x^2 - t^2}{2},$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,s)K_2(s,t)ds = \int_t^x x\,s\,\frac{s^2 - t^2}{2}\,ds = x\,\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - t^2}{2}\right)^2.$$

Можно доказать (например, методом математической индукции), что

$$K_j(x,t) = x\,\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{x^2 - t^2}{2}\right)^{j-1}, j = 1, 2, \ldots$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер в формулу (2.4), найдем резольвенту

$$R\,(x,t,\lambda) = x\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\left(\frac{x^2 - t^2}{2}\right)^{j-1} = x\,e^{\lambda\frac{x^2-t^2}{2}}. \qquad (2.7)$$

С помощью резольвенты (2.7) найдем решение данного интегрального уравнения (2.6). В рассматриваемом случае $\lambda = 1$ и $f(x) = x^3$, поэтому на основании (2.5) получаем

$$y(x) = x^3 + \int_0^x x\,e^{\frac{x^2-t^2}{2}}t^3dt = x^3 - x\,e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x t^2\,de^{\frac{-t^2}{2}} =$$

$$= 2\,x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right).$$

Варианты домашних заданий

<u>*Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерры со следующим ядром:*</u>

2.1 $K(x,t) = \frac{2t^2 - t+1}{2x^2 - x+1}\,2^{(\mathrm{ch}\,x - \mathrm{ch}t)}$.

2.2 $K(x,t) = (t - x)e^{(\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,t)}$, при $\lambda = e^2$.

2.3 $K(x,t) = x^{0,9}\,t^{1,1}$.

2.4 $K(x,t) = \frac{10 - \sin t}{10 - \sin x}\,8^{(t^2 - x^2)}$.

2.5 $K(x,t) = (x-t)2^{(\sin x - \sin t)}$, при $\lambda = 4$.

2.6 $K(x,t) = x^{\frac{1}{8}}\, t^{\frac{1}{4}}$.

2.7 $K(x,t) = \frac{t^2+t+1}{x^2+x+1}$.

2.8 $K(x,t) = (t-x)7^{(\sin t - \sin x)}$, при $\lambda = 49$.

2.9 $K(x,t) = x^2\, t^2 e^{\frac{t^5-x^5}{5}}$.

2.10 $K(x,t) = 2^{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)}$.

2.11 $K(x,t) = (x-t)e^{(x-t)}$, при $\lambda = 1$.

2.12 $K(x,t) = x\, t$.

2.13 $K(x,t) = \frac{2t^2+t+1}{2x^2+x+1}$.

2.14 $K(x,t) = (t-x)e^{(x^4-t^4)}$, при $\lambda = 1$.

2.15 $K(x,t) = \frac{1+\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch} x} e^{2(x-t)}$.

2.16 $K(x,t) = x^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}$.

2.17 $K(x,t) = x\, t^2 e^{\frac{t^4-x^4}{4}}$.

2.18 $K(x,t) = (x-t)e^{(x^5-t^5)}$, при $\lambda = 1$.

2.19 $K(x,t) = x^2\ 0{,}3^{(x^2-t^2)}$.

2.20 $K(x,t) = x^{0,7}\, t^{0,3}$.

2.21 $K(x,t) = \frac{t^2+2t+3}{x^2+2x+3} e^{(t-x)}$.

2.22 $K(x,t) = x^3$.

2.23 $K(x,t) = \frac{t^2-t+1}{x^2-x+1}$.

2.24 $K(x,t) = (x-t)5^{(\cos t - \cos x)}$, при $\lambda = 25$.

2.25 $K(x,t) = t\, e^{\frac{x^2-t^2}{2}}$.

2.26 $K(x,t) = \frac{3+\sin x}{3+\sin t} e^{(\sin x - \sin t)}$.

2.27 $K(x,t) = 3^{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)}$.

2.28 $K(x,t) = x^{\frac{1}{2}}\, t^{\frac{1}{3}}$.

2.29 $K(x,t) = \frac{t^4+1}{x^4+1}$.

2.30 $K(x,t) = \frac{\operatorname{ch} t - 0{,}5}{\operatorname{ch} x - 0{,}5}$.

3. Интегральные уравнения Фредгольма. Характеристические числа и собственные функции

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = 0. \qquad (3.1)$$

Пределы интегрирования a и b в (3.1) – конечные числа, функция $K(x,t)$ непрерывна в своей области определения $\Omega =$ $= \{a \le x,\ t \le b\}$ или удовлетворяет условию (0.5).

Уравнение (3.1) имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое называют *нулевым* (*тривиальным*) решением. Значения параметра λ, при которых однородное уравнение (3.2) имеет ненулевые (нетривиальные) решения $y(x) \not\equiv 0$, называют *характеристическими числами* этого уравнения или ядра $K(x,t)$, а каждое ненулевое решение – *собственной функцией* уравнения или ядра $K(x,t)$, соответствующей характеристическому числу λ. Каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций. Число таких линейно независимых функций называется *рангом* или *кратностью* характеристического числа. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ уравнение (3.1) имеет лишь нулевое решение. Если λ – характеристическое число, то число $\mu = {}^{1}\!/_{\lambda}$ называется собственным числом интегрального уравнения. При этом $\mu \ne 0$ (отметим, что $\mu = 0$ может быть собственным числом бесконечной кратности).

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t)\ y(t)\, dt = 0, \qquad (3.2)$$

где, как и раньше, $\{a_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^n$ – системы линейно независимых на отрезке $[a,b]$ функций. Перепишем (3.2) в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) y(t)\, dt \qquad (3.3)$$

и введем обозначения

$$\int_a^b b_k(t) y(t)\, dt = C_k \ (k = 1, 2, \dots, n). \qquad (3.4)$$

Тогда (3.3) примет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k\, a_k(x) \qquad (3.5)$$

где C_k – неизвестная постоянная (так как функция $y(x)$ неизвестна), и решение интегрального уравнения с вырожденным ядром свелось к нахождению постоянных C_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Подставляя выражение (3.5) в интегральное уравнение (3.2), получим

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) [\lambda \sum_{k=1}^{n} C_k\, a_k(t)] dt \right\} a_m(x) = 0. \quad (3.6)$$

Так как функции из (3.6) линейно независимы, то

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km}\, C_k = 0, \ (m = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

где $a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt$, (3.8)

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (1 - \lambda\, a_{11})\, C_1 - \lambda\, a_{12}\, C_2 - \dots - \lambda\, a_{1n}\, C_n = 0, \\ -\lambda\, a_{21}\, C_1 + (1 - \lambda\, a_{22})\, C_2 - \dots - \lambda\, a_{2n}\, C_n = 0, \\ \dots, \\ -\lambda\, a_{n1}\, C_1 - \lambda\, a_{n2}\, C_2 - \dots + (1 - \lambda\, a_{nn})\, C_n = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Таким образом, в случае уравнения с вырожденным ядром характеристические числа λ являются корнями алгебраического уравнения:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda\, a_{11}) & -\lambda\, a_{12} & \dots & -\lambda\, a_{1n} \\ -\lambda\, a_{21} & (1 - \lambda\, a_{22}) & \dots & -\lambda\, a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\lambda\, a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & (1 - \lambda\, a_{nn}) \end{vmatrix} = 0. (3.10)$$

Определитель $D(\lambda)$ (3.10) есть многочлен относительно λ степени не выше n, следовательно, имеет не более n различных значений. Если уравнение (3.10) имеет p корней $(1 \leq p \leq n)$, то интегральное уравнение имеет p характеристических чисел. Соответствующая каждому характеристическому числу λ_m $(m = = 1, 2, \dots p)$ однородная система линейных алгебраических уравнений (3.9) имеет r_m линейно независимых вектор-решений:

$$\left(C_1^{(m,l)}, C_2^{(m,l)}, \dots, C_n^{(m,l)} \right), \ l = 1, \dots, r_m.$$

Функции

$$y_l^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(m,l)}\, a_k\,(x) \quad (l = 1, \dots, r_m)$$

являются нетривиальными решениями однородного интегрального уравнения (3.2) при значении $\lambda = \lambda_m$. Число таких линейно независимых собственных функций, отвечающих данному характеристическому числу λ_m, равно рангу r_m

характеристического числа λ_m. Нетрудно заметить, что любая линейная комбинация собственных функций, соответствующих одному и тому же характеристическому числу λ_m, также является собственной функцией рассматриваемого интегрального уравнения, отвечающей этому же числу λ_m. Общее решение однородного интегрального уравнения (3.2), соответствующее данному характеристическому числу λ_m, имеет вид:

$$y^{(m)}(x) = \sum_{l=1}^{r_m} \alpha_l \, y_l^{(m)}(x),$$

где α_l – произвольные постоянные.

Пример 3.1. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (x\, e^t + 2\, t) y(t) dt = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x\, e^t + 2\, t) y(t) dt.$$

Вводя обозначения

$$C_1 = \int_0^1 e^t\, y(t)\, dt\,; \qquad C_2 = \int_0^1 t\, y(t) dt, \tag{3.11}$$

будем иметь

$$y(x) = \lambda\, x\, C_1 + 2\, \lambda\, C_2. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим линейную систему однородных уравнений

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^1 t\, e^t\, dt\right) - C_2\, 2\, \lambda \int_0^1 e^t\, dt = 0, \\ -C_1\, \lambda \int_0^1 t^2\, dt + C_2 \left(1 - 2\, \lambda \int_0^1 t\, dt\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 (1 - \lambda) - C_2\, 2\, \lambda\, (e - 1) = 0, \\ C_1\, \lambda/3 - C_2\, (1 - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Из уравнения (3.10)

$$-(1 - \lambda)^2 + \frac{2}{3}\, \lambda^2\, (e - 1) = 0$$

находим следующие значения характеристических чисел

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}(e - 1)}}$$

и соответствующие им собственные функции

$$y_{1,2}\,(x) = \sqrt{\frac{2}{3}\,(e - 1)}\; x \pm 1.$$

Однородное уравнение Фредгольма может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций, или же может не иметь вещественных характеристических чисел и собственных функций, но иметь комплексные.

Пример 3.2. Покажем, что однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin t \; y(t)dt = 0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.
Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin t \; y(t)dt .$$

Полагая $C = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \; y(t)dt$, получим

$$y(x) = \lambda x^2 C.$$

Подставляя $y(x)$ в выражение для C, получим

$$\left[1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \; dt\right] C = 0. \tag{3.13}$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \; dt = 0$, то уравнение (3.13) дает, что $C = 0$, и, следовательно, $y(x) \equiv 0$. Итак, данное однородное уравнение при любых значениях λ имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, и, следовательно, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода (0.3):

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \tag{3.14}$$

Поставим вопрос о разрешимости уравнения (3.14) при различных значениях параметра λ. Пусть функция $K(x,t)$ непрерывна в Ω. Для интегральных уравнений Фредгольма имеет место так называемая *альтернатива Фредгольма*: либо интегральное уравнение (3.14) имеет единственное решение для любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), либо существует нетривиальное решение однородного уравнения (3.1).

Другими словами, если число не является характеристическим для однородного уравнения (3.1), то уравнение (3.14) имеет, и притом единственное, решение.

Проиллюстрируем теорему Фредгольма на примере интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Пример 3.3. Исследовать решения интегрального уравнения в зависимости от значений параметра λ:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 x\,(1+t)\,y(t)dt = x^2.$$

Имеем

$$y(x) = \lambda\, x\, C + x^2, \qquad (3.15)$$

где $C = \int_0^1 (1+t)\,y(t)dt$. (3.16)

Подставляя выражение (3.15) в (3.16), получим

$$C\,\left(1 - \lambda\,\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{12}. \qquad (3.17)$$

$\lambda = \frac{6}{5}$ является характеристическим числом соответствующего однородного уравнения. При любом $\lambda \neq \frac{6}{5}$ уравнение (3.17) имеет единственное решение $C = \frac{7}{2\,(6-5\,\lambda)}$, и

$$y(x) = \frac{7}{2\,(6-5\,\lambda)}\,x + x^2,\ \lambda \neq \frac{6}{5}.$$

Пример 3.4. Исследовать решения интегрального уравнения в зависимости от значений параметра λ:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2\,x)\,t\,y(t)dt = 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

Введем $C = \int_0^1 t\,y(t)dt$, тогда

$$y(x) = \lambda\,(1+2\,x)\,C + 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

После подстановки $y(x)$ в выражение для C с учетом

$$\int_0^1 t\,\left(1 - \frac{3}{2}\,t\right)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}\Big|_0^1 = 0,$$

получим

$$\left(1 - \lambda\,\frac{7}{6}\right)\,C = 0.$$

При $\lambda = \frac{6}{7}$ ($\lambda = \frac{6}{7}$ – характеристическое число соответствующего однородного уравнения) решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{6}{7}\,(1+2\,x)\,C + 1 - \frac{3}{2}\,x,$$

где C – произвольная постоянная.

При $\lambda \neq \frac{6}{7}$ получаем, что $C = 0$ и исходное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

Варианты домашних заданий

<u>Найти характеристические числа и собственные функции заданных интегральных уравнений с вырожденным ядром (ограничиться случаем вещественных характеристических чисел):</u>

3.1 $y(x) - \lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin t + t^2\cos x)y(t)dt = 0.$

3.2 $y(x) - \lambda\int_0^{\pi}\cos(x-t)y(t)dt = 0.$

3.3 $y(x) - \lambda\int_{-1}^{1}(9 - 19xt + 35x^2t^2)\,y(t)dt = 0.$

3.4 $y(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x-t)y(t)dt = 0.$

3.5 $y(x) - \lambda\int_0^1(x+t)\,y(t)dt = 0.$

3.6 $y(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(t^2\sin x + x\sin^2 t)y(t)dt = 0.$

3.7 $y(x) - \lambda\int_0^{\pi}\sin(x+t)\,y(t)dt = 0.$

3.8 $y(x) - \lambda\int_0^1\left(x\sin 2\pi t - \frac{1}{2\pi}\right)y(t)dt = 0.$

3.9 $y(x) - \lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x-t)y(t)dt = 0.$

3.10 $y(x) - \lambda\int_0^1(1 + 4xt - 5x^2t^2)\,y(t)dt = 0.$

3.11 $y(x) - \lambda\int_0^{\pi}\cos x\ \cos t\,y(t)dt = 0.$

3.12 $y(x) - \lambda\int_0^{\pi}\ x\sin t\,y(t)dt\ = 0.$

3.13 $y(x) - \lambda\int_{-1}^{1}|x|\,y(t)dt = 0.$

3.14 $y(x) - \lambda\int_{-1}^{1}(x^2\,\mathrm{sh}\,t + t^2\,\mathrm{ch}\,x)y(t)dt = 0.$

3.15 $y(x) - \lambda\int_0^1(1 - x^2)\,y(t)dt = 0.$

<u>Исследовать решения заданных уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра λ (ограничиться случаем вещественных характеристических чисел):</u>

3.16 $y(x) - \lambda\int_0^1 x\,y(t)dt = \sin 2\pi x.$

3.17 $y(x) - \lambda\int_0^1 x\sin 2\pi t\,y(t)dt = x.$

3.18 $y(x) - \lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,t\,y(t)dt = \mathrm{ctg}\,x.$

3.19 $y(x) - \lambda\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arccos t\,y(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

3.20 $y(x) - \lambda\int_0^{\pi}\sin x\ \cos t\,y(t)dt = \cos x.$

3.21 $y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(1+xt)\,y(t)dt=\sin\pi x.$

3.22 $y(x)-\lambda\int_{0}^{1}t\arcsin x\,y(t)dt=\arccos x.$

3.23 $y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x+t)\,y(t)dt=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x.$

3.24 $y(x)-\lambda\int_{0}^{\pi}\cos(x+t)y(t)dt=1.$

3.25 $y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}|x|\,y(t)dt=\cos\pi x.$

3.26 $y(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\sin^2 x\ \sin^2 t\,y(t)dt=\cos x.$

3.27 $y(x)-\lambda\int_{0}^{\pi}(\cos^2 x\sin 2t+\cos^2 t\sin 2x)\,y(t)dt=\cos x.$

3.28 $y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(xt+t^2)\,y(t)dt=5x^3.$

3.29 $y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}x\arcsin t\,y(t)dt=1.$

3.30 $y(x)-\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos^2 t\,y(t)dt=\sin x.$

4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения называется *симметричным*, если оно удовлетворяет условию $K(x,t)=K(t,x)$ для всех $(x,t)\in\Omega=\{a\le x,\ t\le b\}$. Для симметричных ядер, удовлетворяющих условию (0.5):

$$\int_a^b\int_a^b|K(x,t)|^2dx\,dt=B_K^2<+\infty,$$

справедливы следующие утверждения:

1. Симметричное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

2. Характеристические числа симметричного ядра действительны, а собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1\neq\lambda_2$, ортогональны, т.е.

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx=0.$$

Каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

На практике часто встречается случай, когда интегральное уравнение с симметричным ядром является решением некоторой однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В таких случаях нахождение характеристических чисел и собственных функций ядра сводится к решению указанной краевой задачи.

Пример 4.1. Найти характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x,t) = \begin{cases} -x-1, & 0 \le x \le t; \\ -t-1, & t \le x \le 1. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Заметим, что ядро (4.1) симметричное. Действительно, так как

$$K(t,x) = \begin{cases} -t-1, & 0 \le t \le x \le 1; \\ -x-1, & 0 \le x \le t \le 1, \end{cases}$$

то $K(x,t) = K(t,x)$ для любой пары (x,t).

Однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t) y(t) dt = 0$$

с ядром (4.1) запишем следующим образом:

$$y(x) = \lambda \left[-\int_0^x (t+1)\, y(t) dt - (x+1) \int_x^1 y(t) dt \right]. \qquad (4.2)$$

Дважды продифференцируем (4.2):

$$y'(x) = -\lambda \int_x^1 y(t)\, dt,$$

$$y''(x) = \lambda\, y(x).$$

Число λ и функция $y(x)$ таковы, что

$$y''(x) - \lambda\, y(x) = 0. \qquad (4.3)$$

Заметим, что

$$y'(0) - y(0) = 0,$$

$$y'(1) = 0. \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.3) и условия (4.4) образуют однородную краевую задачу, решая которую найдем характеристические числа и соответствующие им собственные функции исходного интегрального уравнения. Рассмотрим три случая.

1) $\lambda = 0$. Уравнение (4.3) принимает вид $y''(x) = 0$, его общее решение $y(x) = C_1 + C_2\, x$. Используя краевые условия (4.4), получим, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, краевая задача, а вместе с ней и уравнение (4.2) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, т.е. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом. Это можно было сразу заметить из уравнения (4.2): если $\lambda = 0$, то $y(x) \equiv 0$.

2) Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\lambda = k^2$, $k > 0$. Уравнение (4.3) принимает вид

$$y''(x) - k^2\, y(x) = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$$

Краевые условия (4.4) приводят к системе

$$(k-1)C_1 + (k+1)C_2 = 0,$$
$$e^k C_1 \quad - e^{-k} C_2 = 0.$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} (k-1) & (k+1) \\ e^k & e^{-k} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k \operatorname{sh} k + \operatorname{ch} k = 0. \qquad (4.5)$$

В свою очередь (4.5) не имеет решений ($\operatorname{cth} k = -k, k > 0$).

3) Пусть $\lambda < 0$. Тогда $\lambda = -k^2$, $k > 0$. В этом случае (4.3) имеет вид

$$y''(x) - k^2 y(x) = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Краевые условия (4.4) приводят к системе:

$$\begin{matrix} C_1 & -k\,C_2 & = 0, \\ \sin k\ C_1 & -\cos k\ C_2 & = 0. \end{matrix} \qquad (4.6)$$

Откуда следует, что система (4.6) имеет нетривиальное решение в случае, если

$$\begin{vmatrix} 1 & -k \\ \sin k & -\cos k \end{vmatrix} = -\cos k + k \sin k = 0.$$

Следовательно, если k является корнем уравнения

$$k = \operatorname{ctg} k, \qquad (4.7)$$

то $\lambda = -k^2$ является характеристическим числом для заданного ядра (4.1). Из (4.6) и (4.7) получим следующее выражение для собственных функций:

$$\lambda = \lambda_k = -k^2,\ y_k(x) = \cos k(x-1),\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Варианты домашних заданий

Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

4.1 $\quad K(x,t) = \begin{cases} (x-2)(t+1), & 0 \le x \le t; \\ (t-2)(x+1), & t \le x \le 2. \end{cases}$

4.2 $$K(x,t) = \begin{cases} \cos 2t \sin 2x \ , \ 0 \le x \le t; \\ \cos 2x \sin 2t \ , \ t \le x \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4.3 $$K(x,t) = \begin{cases} -\,e^{-t} \operatorname{ch} x \ , \ 0 \le x \le t; \\ -\operatorname{ch} t \ e^{-x} , \ t \le x \le 2. \end{cases}$$

4.4 $$K(x,t) = \begin{cases} (\pi \cos t + \sin t) \sin x \ , \ 0 \le x \le t; \\ (\pi \cos x + \sin x) \sin t \ , \ t \le x \le \pi. \end{cases}$$

4.5 $$K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), \ 0 \le x \le t; \\ (t+1)(x-3), \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

4.6 $$K(x,t) = \begin{cases} e^{\frac{x-t}{4}} , -4 \le x \le t; \\ e^{\frac{t-x}{4}} , \ t \le x \le 4. \end{cases}$$

4.7 $$K(x,t) = \begin{cases} (\operatorname{ctg} 1 \sin t - \cos t) \sin x \ , -\pi \le x \le t; \\ (\operatorname{ctg} 1 \sin x - \cos x) \sin t \ , \ t \le x \le \pi. \end{cases}$$

4.8 $$K(x,t) = \begin{cases} \cos 3t \sin 3x \ , \ 0 \le x \le t; \\ \cos 3x \sin 3t \ , \ t \le x \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

4.9 $$K(x,t) = \begin{cases} e^{t} \operatorname{sh} x \ , \ 0 \le x \le t; \\ e^{x} \operatorname{sh} t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

4.10 $$K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)(\cos 3x + 6\sin 3x) \ , \ \frac{\pi}{6} \le x \le t; \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)(\cos 3t + 6\sin 3t) \ , \ t \le x \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

4.11 $$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), \ 0 \le x \le t; \\ t(x-1), \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

4.12 $$K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x-1) \operatorname{ch} t \ , \ 0 \le x \le t; \\ \operatorname{sh}(t-1) \operatorname{ch} x, \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

4.13 $$K(x,t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2} \cos\frac{x}{2} \ , -\pi \le x \le t; \\ \sin\frac{x}{2} \cos\frac{t}{2}, \ t \le x \le \pi. \end{cases}$$

4.14 $$K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \sin 2x \ , \ 0 \le x \le t; \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \sin 2t \ , \ t \le x \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

4.15 $$K(x,t) = \begin{cases} e^{t} \operatorname{ch} x \ , \ 0 \le x \le t; \\ e^{x} \operatorname{ch} t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

4.16 $$K(x,t) = \frac{1}{2} \sin|x-t| \ , 0 \le x \le t \le \pi.$$

4.17 $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t-1)\sin x}{\sin 1}, \ 0 \le x \le t; \\ \dfrac{\sin t \sin(x-1)}{\sin 1}, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.18 $K(x,t) = \begin{cases} e^x \operatorname{sh} t, \ 0 \le x \le t; \\ e^t \operatorname{sh} x, \ t \le x \le 2. \end{cases}$

4.19 $K(x,t) = \begin{cases} (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) \cos\frac{t}{2}, \ 0 \le x \le t; \\ (\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}) \cos\frac{x}{2}, \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.20 $K(x,t) = \begin{cases} e^x \operatorname{ch} t, \ 0 \le x \le t; \\ e^t \operatorname{ch} x, \ t \le x \le 2. \end{cases}$

4.21 $K(x,t) = \begin{cases} -x, \ 0 \le x \le t; \\ -t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.22 $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh} t, \ 0 \le x \le t; \\ \operatorname{ch}(t-1)\operatorname{sh} x, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.23 $K(x,t) = \begin{cases} (\sin 4t - 4\cos 4t)\sin 4x, \ 0 \le x \le t; \\ (\sin 4x - 4\cos 4x)\sin 4t, \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.24 $K(x,t) = \begin{cases} e^{\frac{t-x}{2}}, \ 0 \le x \le t; \\ e^{\frac{x-t}{2}}, \ t \le x \le 2. \end{cases}$

4.25 $K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 4t, \ \frac{\pi}{8} \le x \le t; \\ \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)\cos 4x, \ t \le x \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

4.26 $K(x,t) = \begin{cases} \sin\frac{x}{3}\cos\frac{t}{3}, -\frac{3\pi}{2} \le x \le t; \\ \sin\frac{t}{3}\cos\frac{x}{3}, \ t \le x \le \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

4.27 $K(x,t) = \begin{cases} (3\cos 3x - \sin 3x)\sin 3t, \ 0 \le x \le t; \\ (3\cos 3t - \sin 3t)\sin 3x, \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.28 $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(t-1)\operatorname{ch} x, \ 0 \le x \le t; \\ \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch} t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.29 $K(x,t) = \operatorname{sh}|x-t|, 0 \le x \le t \le 1.$

4.30 $K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x}{3}, \ 0 \le x \le t; \\ \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{t}{3}, \ t \le x \le 3\pi. \end{cases}$

5. Функция Грина для краевой задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} p_0(x)\, y'' + \ p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x), \ \ a < x < b, \\ \alpha_1\, y'(a) + \ \beta_1\, y\,(a) = 0, \ \ \alpha_2\, y'(b) + \beta_2\, y\,(b) = 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Пусть функции $p_i(x)\ (i = 0, 1, 2)$ и $f(x)$ непрерывны при $a \le x \le b$, $p_0(x) \ne 0$. Рассмотрим случай, когда однородная краевая задача

$$\begin{cases} p_0(x)y'' + \ p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \ \ a < x < b, \\ \alpha_{1k}\, y'(a) + \ \beta_{1k}y\,(a) + \alpha_{2k}y'(b) + \beta_{2k}y\,(b) = 0\ (k = 1, 2) \end{cases} \qquad (5.2)$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Тогда существует, и притом единственная, функция $G(x, \xi)$, называемая функцией Грина, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. $G(x, \xi)$ непрерывна в $\Pi = \{(x, \xi): a \le x \ \le b, a \ \le \ \xi \ \le b\}$.

2. $G(x, \xi)$ как функция x, при любом $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет однородному уравнению (5.2) при $x \ \ne \ \xi$.

3. $G(x, \xi)$ как функция переменной x, при любом $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет граничным условиям задачи (5.2).

4. Первая производная $G(x, \xi)$ по x при любом $\xi \in (a, b)$ имеет при $x = \ \xi$ разрыв 1-го рода с величиной скачка, равной $\frac{1}{p_0(x)}$, т.е.

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x = \xi + 0} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x = \xi - 0} = \frac{1}{p_0(x)} .$$

В этом случае решение краевой задачи (5.1) представимо в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \qquad (5.3)$$

Построим функцию Грина $G(x, \xi)$ для однородной задачи (5.2). Пусть $y_1(x)$, $y_1(x)$ – линейно независимые решения уравнения (5.2). Так как функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет однородному уравнению (5.2) при $x \ \ne \ \xi$ (условие 2), на интервалах $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ $G(x, \xi)$ должна иметь следующее представление:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)\, y_1(x) + \ \ a_2(\xi)\, y_2(x) \text{ при } a \le x \le \xi, \\ b_1(\xi)\, y_1(x) + \ \ b_2(\xi)\, y_2(x) \text{ при } \xi \le x \le b, \end{cases} \qquad (5.4)$$

где $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ – некоторые функции от ξ. Непрерывность $G(x, \xi)$ (условие 1) и величина скачка производной (условие 4) при $x = \ \xi$ принимают вид:

$$\big(b_1(\xi)y_1(\xi) + b_2(\xi)y_2(\xi)\big) - \big(a_1(\xi)y_1(\xi) + a_2(\xi)y_2(\xi)\big) = 0,$$
$$\big(b_1(\xi)y_1'(\xi) + b_2(\xi)y_2'(\xi)\big) - \big(a_1(\xi)y_1'(\xi) + a_2(\xi)y_2'(\xi)\big) = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$
Или
$$\begin{aligned} c_1(\xi)\, y_1(\xi) + c_2(\xi)\, y_2(\xi) &= 0, \\ c_1(\xi)\, y_1'(\xi) + c_2(\xi)\, y_2'(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}, \end{aligned} \qquad (5.5)$$
где $c_1(\xi) = b_1(\xi) - a_1(\xi)$, $c_2(\xi) = b_2(\xi) - a_2(\xi)$. Определитель системы (5.5) есть определитель Вронского $W\,(y_1, y_2)$ в точке $x = \xi$, следовательно, отличен от нуля. Поэтому система (5.5) однозначно определяет функции $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$. Для определения функций $a_1(\xi), a_2(\xi)$, $b_1(\xi)$ и $b_2(\xi)$ воспользуемся краевыми условиями (5.2).

Пример 5.1. Построить функцию Грина для краевой задачи:
$$\begin{aligned} &x\, y'' + y' = 0 \ (1 < x < e), \\ &y(1) = 0, \quad y'(e) = 0. \end{aligned} \qquad (5.6)$$
Покажем, что краевая задача (5.6) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Обозначая $y'(x) = z\,(x)$, получим $x\, z'(x) + z = = 0$, откуда $z = \frac{C_1}{x}$. Так как $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$, и, следовательно, $y(x) = C_1 \ln x + C_2$. Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным условиям (5.6) только при $C_1 = C_2 = 0$, а значит $y(x) \equiv 0$, и функцию Грина (единственную) задачи (5.6) можно построить. Запишем выражение для функции Грина
$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 \ln x + a_2 & \text{при } 1 \le x \le \xi, \\ b_1 \ln x + b_2 & \text{при } \xi \le x \le e. \end{cases}$$
Из непрерывности при $x = \xi$ получим
$$(b_1 - a_1)\ln\xi + (b_2 - a_2) = 0.$$
Скачок $G_x'(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ равен $\frac{1}{\xi}$, следовательно, $(b_1 - - a11\xi= 1\xi$. Положим
$$c_1 = b_1 - a_1, \ c_2 = b_2 - a_2.$$
Тогда будем иметь
$$\begin{cases} c_1 \ln\xi + c_2 = 0, \\ \quad c_1 = 1. \end{cases}$$
Откуда
$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\ln\xi.$$

Используя краевые условия (5.6), получим $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, следовательно, $a_1 = -1$, $b_2 = -\ln\xi$. Итак,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\ln x & \text{при } 1 \le x \le \xi, \\ -\ln\xi & \text{при } \xi \le x \le e. \end{cases} \qquad (5.7)$$

<u>Пример 5.2.</u> Решить краевую задачу, используя функцию Грина:

$$\begin{aligned} &x\,y'' + y' = \frac{1}{x} \ (1 < x < e), \\ &y(1) = 0, \quad y'(e) = 0. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Решение краевой задачи (5.8) запишем в виде

$$y(x) = \int_1^{e} G(x,\xi)\frac{1}{\xi\ln\xi}d\xi, \qquad (5.9)$$

где $G(x,\xi)$ определена формулой (5.7). Разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (5.9) выражение для функции Грина (5.7), получим

$$y(x) = \int_1^x (-\ln\xi)\,\frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_x^{e} (-\ln x)\,\frac{1}{\xi}\,d\xi = -\int_1^x \frac{\ln\xi}{\xi}d\xi -$$

$$-\ln x\int_x^{e}\frac{1}{\xi\ln\xi}d\xi = -\frac{1}{2}\ln^2\xi\Big|_1^x - \ln x\ln\xi\big|_x^{e} = \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right).$$

Варианты домашних заданий

<u>Решить краевую задачу, используя Функцию Грина:</u>

5.1 $y'' + 4y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

5.2 $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$,
$y(0) - y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

5.3 $9y'' + y = -12\,x\cos\frac{x}{3}$, $y'\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

5.4 $y'' - y = 5 - x$, $y'(0) = 0$, $y(1) = y'(1)$.

5.5 $y'' + 16y = x$, $y(0) = 0$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

5.6 $2y'' - 3y' + y = x\,e^{x}$, $y(1) - y'(1) = 0$, $y(-1) = 0$.

5.7 $y'' + y' - 2y = 182xe^{-2x}$, $2y(0) + y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

5.8 $y'' + 9y = 63$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $3y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

5.9 $y'' - y' = -1$, $y'(0) = 0$, $e y(1) = (e - 1)y'(1)$.

5.10 $4y'' + y = 4\,x\sin\frac{x}{2}$, $y(-\pi) = y'(\pi) = 0$.

5.11 $2y'' - 3y' + y = -x,\ \ y(0) - y'(0) = 0,\ \ y(1) = 0.$

5.12 $2y'' - y' = 3x^2 - 1,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) - 2y'(1) = 0.$

5.13 $y'' + 9y = -27,\ \ y(0) + y'(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0.$

5.14 $y'' + 2y' - 3y = 4e^x,\ \ y(-1) = 0,\ \ 3y(1) + y'(1) = 0.$

5.15 $2y'' - y' - y = 54x\, e^x,$
$y(-1) - y'(-1) = 0,\ \ y(1) + 2y'(1) = 0.$

5.16 $y'' + 9y = x - \frac{\pi}{6},\ \ y(0) = 0\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

5.17 $y'' + y' = e^{-x},\ \ y(0) + y(1) = 0,\ \ y'(0) + y'(1) = 0.$

5.18 $4y'' - y = 8\operatorname{ch} x,\ \ y(0) + 2y'(0) = 0,\ \ y(2) - 2y'(2) = 0.$

5.19 $4y'' + y = 4\sin\frac{x}{2},\ \ y(0) + 2y'(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0.$

5.20 $y'' + 16y = 64x,\ \ 4y\left(\frac{\pi}{8}\right) + y'(\frac{\pi}{8}) = 0,\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

5.21 $y'' - y' - 2y = -12x,\ \ y'(0) = 0,\ \ y(1) + y'(1) = 0.$

5.22 $y'' + 4y = 4 - 8x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

5.23 $y'' + y' = 2x + 2,\ y'(0) = 0,\ \ y(1) = 0.$

5.24 $2y'' + y' = x^2 e^{-\frac{x}{2}},\ \ y(-2) + 2y'(-2) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

5.25 $y'' + y = x,\ \ y(-\pi) = 0,\ \ y(\pi) + \operatorname{tg}1\, y'(\pi) = 0.$

5.26 $y'' - y' - 2y = 6\operatorname{ch} 2x,\ \ y(-1) + y'(-1) = 0,\ \ y(1) = 0.$

5.27 $9y'' + y = 4\cos\frac{x}{3},\ \ y'(0) = 0,\ \ y(3\pi) - 3y'(3\pi) = 0.$

5.28 $y'' + y' - 2y = 54xe^x,$
$y(0) + y'(0) = 0,\ 2y(1) + y'(1) = 0.$

5.29 $2y'' - y' - y = 2\operatorname{ch} x,$
$y(-1) + 2y'(-1) = 0,\ \ y(1) - y'(1) = 0.$

5.30 $y'' + y = x,\ \ y(0) = 0,\ y(\pi) = \pi\, y'(\pi).$

6. Применение интегральных преобразований к решению интегральных уравнений

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t)\, y(t)\, dt, \tag{6.1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x)\, dx < +\infty.$$

Применим к уравнению (6.1) преобразование Фурье:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, e^{-i\omega x}dx,$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx,$$

и используем теорему о свертке

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, y(t)\, dt\right] e^{-i\omega x}dx = \widetilde{K}(\omega)Y(\omega),$$

где $\widetilde{K}(\omega)$ – преобразование Фурье ядра

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\, e^{-i\omega x}dx.$$

В результате получим:

$$Y(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}\, Y(\omega)\widetilde{K}(\omega). \qquad (6.2)$$

Из уравнения (6.2) при условии $1 - \widetilde{K}(\omega) \neq 0$ находим

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\omega)}. \qquad (6.3)$$

Применяя к (6.3) формулу обращения преобразования Фурье, получим решение уравнения (6.1)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\omega)}\, e^{i\omega x}d\omega. \qquad (6.4)$$

Аналогично решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, y(t)\, dt = f(x).$$

Пример 6.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\, y(t)\, dt. \qquad (6.5)$$

Применим к уравнению (6.5) преобразование Фурье:

$$Y(\omega) = F(\omega) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\, Y(\omega)\widetilde{K}(\omega). \qquad (6.6)$$

Найдем

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{\,x(1-i\omega)}\, dx +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{\,-x(1+i\omega)}\, dx\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2},$$

аналогично

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Подставляя $F(\omega)$ и $\widetilde{K}(\omega)$ в (6.6), получим

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{\frac{1}{2}+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}. \qquad (6.7)$$

Формула обращения (6.4) для (6.7) дает решение интегрального уравнения (6.5):

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\, e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\, e^{i\omega x}d\omega\,. \qquad (6.8)$$

К вычислению интеграла (6.8) применим метод контурного интегрирования. Пусть $x \geq 0$. Функция $\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $Z_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением одной особой точки $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (полюса первого порядка). Рассмотрим положительно ориентированную кусочно-гладкую замкнутую кривую Г, состоящую из отрезка $\gamma = [-R; R]$ и полуокружности $\Gamma_R = \left\{z \in \mathbb{C}: z = R\, e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\right\}$, где значение R таково, что особая точка $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ лежит в области, ограниченной кривой Г. Тогда согласно основной теореме о вычетах:

$$\int_\Gamma \frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}\,dz = \int_{-R}^{+R}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\, e^{i\omega x}d\omega + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}\,dz =$$

$$2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\, e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$. Поскольку функция $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, т.е. является аналитической функцией в верхней полуплоскости $Z_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением одной особой точки $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (полюса первого порядка) и

$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, где $M(R) = \max_{z\in\Gamma_R}|g(z)|$,

то для любого $x > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)e^{izx}\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\, e^{i\omega x}d\omega = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\, e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

Найдем вычет для полюса первого порядка

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\,e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{izx}}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Итак, для функции $y(x)$ при $x \geq 0$ будем иметь

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\,2\pi i\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Для случая $x < 0$ можно провести аналогичные рассуждения или сразу в формуле (6.8) сделать замену ω на $-$ ω:

$$y(x) = \sqrt{2}\,e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Объединяя оба результата, получим:

$$y(x) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}}.$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\,y(t)\,dt,\ \ (0 \leq x < \infty). \qquad (6.9)$$

Будем называть уравнение (6.9) *интегральным уравнением типа свертки*. Пусть функции $f(x)$ и $K(x)$ – непрерывны при $x \geq 0$ и растут при $x \to +\infty$ не быстрее показательной функции:

$$|f(x)| \leq M_1\,e^{s_1 x}, \quad |K(x)| \leq M_2\,e^{s_2 x}. \qquad (6.10)$$

Тогда и для решения $y(x)$ уравнения (6.9) справедлива оценка типа (6.10):

$$|y(x)| \leq M_3\,e^{s_3 x}.$$

При этих условиях функциям действительной переменной $f(x), K(x)$ и $y(x)$, называемым *функциями-оригиналами*, можно поставить в соответствие функции комплексной переменной $p = s + i\sigma$ по правилу:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx, \quad \widetilde{K}(p) = \int_0^\infty e^{-px} K(x)dx,$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-px} y(x)dx.$$

Функции $F(p),\ \widetilde{K}(p),\ Y(p)$называются *изображением* функций $f(x),\ K(x),\ y(x)$ по Лапласу (они определены в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > \max\{s_1, s_2, s_3\}$ и являются в этой полуплоскости аналитическими функциями переменной p). Тот факт, что функции связаны преобразованием Лапласа, обозначается символом:

$$F(p) \risingdotseq f(x), \widetilde{K}(p) \risingdotseq K(x), Y(p) \risingdotseq y(x).$$

Применим к обеим частям уравнения (6.9) преобразование Лапласа. Учтем, что изображением Лапласа свертки является произведение изображений:

$$\int_0^x K(x-t)\, y(t)\, dt \;\risingdotseq\; \widetilde{K}(p)Y(p).$$

Таким образом, уравнению (6.9) соответствует соотношение между изображениями

$$Y(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)Y(p).$$

Отсюда при условии $\widetilde{K}(p) \neq 1$ находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}\,. \tag{6.11}$$

Так как функция $Y(p)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_3$, то знаменатель в (6.11) не может иметь корней в указанной полуплоскости. Используя формулу обращения преобразования Лапласа, находим решение $y(x)$ интегрального уравнения (6.9):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} Y(p)\, e^{px} dp \qquad (s > s_3) \tag{6.12}$$

(интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_3$ и понимается в смысле главного значения). На практике для отыскания оригинала $y(x)$ по его изображению $Y(p)$ не всегда целесообразно использовать формулу обращения (6.12). Часто бывает легче найти оригинал, используя другие теоремы операционного исчисления.

Пример 6.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\, dt. \tag{6.13}$$

Применим к обеим частям уравнения (6.13) преобразование Лапласа. Пусть $Y(p) \risingdotseq y(x)$. Как известно,

$$e^{-x} \risingdotseq \frac{1}{p+1}, \qquad \sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

Перейдем от уравнения (6.13) к уравнению в пространстве изображений

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1}\, Y(p).$$

Для изображения будем иметь

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}. \tag{6.14}$$

Функция $Y(p)$ имеет полюс первого порядка при $p = -1$ и полюс второго порядка в нуле. Поэтому в качестве s в формуле (6.12) можно выбрать любое положительное число. Замкнем контур интегрирования дугой полуокружности. Обозначим через C_R часть дуги окружности $|p| = R$, лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} p = s$, через $s - ib$ и $s + ib$ – концы C_R. Значение b (R) таково, что особые точки $p = -1$ и $p = 0$ лежат внутри контура интегрирования. По теореме Коши о вычетах:

$$\int_{s-ib}^{s+ib} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp + \int_{C_R} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} + \operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} \right).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $b \to +\infty$ $(R \to \infty)$. Сформулируем лемму Жордана в форме, несколько отличной от приведенной в примере 6.1. Заменим переменное $iz = p$, дуги окружностей Γ_R заменятся дугами C_R. Функция $g(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s$ за исключением особых точек $p = -1$ и $p = 0$ и $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, где $M(R) = \max_{p \in C_R} |g(p)|$, тогда для любого $x > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(p) e^{px} dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp =$$

$$2\pi i \left(\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} + \operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} \right). \tag{6.15}$$

Найдем вычет для полюса первого порядка в точке $p = -1$:

$$\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} = \lim_{p\to -1} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px}(p+1) = e^{-x},$$

и вычет для полюса второго порядка в точке $p = 0$:

$$\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2+1}{(p+1)} e^{px} \right) = x - 1,$$

подстановка которых в (6.15) дает решение уравнения (6.13):

$$y(x) = e^{-x} + x - 1. \tag{6.16}$$

Оригинал изображения (6.14) можно найти, не вычисляя интеграл (6.15). Для этого разложим дробь (6.14) на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Воспользовавшись известными формулами:

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1, \ \frac{1}{p^2} \risingdotseq x, \ \frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-x},$$

получим решение (6.16) уравнения (6.13).

Варианты домашних заданий

Применяя преобразование Лапласа, решить следующие интегральные уравнения:

6.1 $y(x) = e^x \cos 2x + \int_0^x e^{(x-t)} y(t)dt.$

6.2 $y(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x (x-t) y(t)dt.$

6.3 $y(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t)dt.$

6.4 $y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t) y(t)dt.$

6.5 $y(x) = \operatorname{sh} x - 6 \int_0^x \cos 3(x-t) y(t)dt.$

6.6 $y(x) = e^{-x} \sin 2x + \int_0^x e^{(x-t)} y(t)dt.$

6.7 $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t)dt.$

6.8 $y(x) = \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.9 $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t)dt = x e^{2x}.$

6.10 $y(x) = x e^x + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t)dt.$

6.11 $\int_0^x \sin(x-t) y(t)dt = \sin^2 x.$

6.12 $y(x) = x e^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)} y(t)dt.$

6.13 $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) y(t)dt.$

6.14 $y(x) = \frac{1}{2} x^2 3^x + \int_0^x (x-t) 3^{x-t} y(t)dt.$

6.15 $y(x) = \cos^2 x + 2 \int_0^x \sin(x-t) y(t)dt.$

6.16 $y(x) = e^{-x} \sin x + \int_0^x e^{(x-t)} y(t)dt.$

6.17 $y(x) = \cos x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.18 $y(x) = x + 2 \int_0^x \sin(x-t) y(t)dt.$

6.19 $y(x) = x e^x + 3 \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.20 $y(x) = \cos x - \int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\right) y(t)dt.$

6.21 $y(x) = x2^x + \int_0^x 2^{x-t} y(t)dt.$

6.22 $y(x) = x^2 - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.23 $y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t)\sin(x-t) y(t)dt.$

6.24 $y(x) = 1 + x\cos x - \sin x + \int_0^x (x-t)\sin(x-t) y(t)dt.$

6.25 $y(x) = x + \int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\right) y(t)dt.$

6.26 $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t) y(t)dt.$

6.27 $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t)dt = x^3.$

6.28 $y(x) = \frac{x^2}{2} + 1 + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.29 $y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t) e^{x-t} y(t)dt.$

6.30 $y(x) = xe^x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2004.

2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах/ Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. М.: Физматлит, 2003.

3. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: методы решения задач. М.: КДУ, 2007.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: КомКнига, 2006.

5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2003.

6. Сборник задач для втузов. Ч. 3./ Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. М.: Физматлит, 2003.

7. Полянин А.Д., Манжиров А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Свойства преобразования Лапласа

Основные свойства преобразования Лапласа

1. *Свойство линейности.*

Пусть $f(x) \risingdotseq F(p), g(x) \risingdotseq G(p)$. Для любых комплексных постоянных α и β: $\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2. *Теорема подобия.*

Для любого постоянного $\alpha > 0$: $f(\alpha x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3. *Дифференцирование оригинала.*

Если функции $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ являются функциями-оригиналами и $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(0), f''(x) \risingdotseq$ $\risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \ldots, f^{(n)}(x) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) -$ $-p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$, где под $f^k(0)(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ понимается $\lim_{x\to+0} f^k(x)$.

4. *Дифференцирование изображения.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-x)^n f(x)$.

5. *Интегрирование оригинала.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^x f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

6. *Интегрирование изображения.*

Если интеграл $\int_p^\infty F(p)\,dp$ сходится, то $\frac{f(x)}{x} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp$.

7. *Теорема смещения.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа p_0: $e^{p_0x}f(x) \risingdotseq F(p - p_0)$.

8. *Теорема запаздывания.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\tau > 0$: $f(x - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$.

9. *Теорема умножения (теорема о свертке).*

Пусть $f(x) \risingdotseq F(p), g(x) \risingdotseq G(p)$. Тогда произведение $F(p)\,G(p)$ также является изображением, причем $F(p)G(p) \risingdotseq f(x) * g(x)$, где $f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ – свертка функций $f(x)$ и $g(x)$.

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\omega x}$	$\frac{1}{p-\omega}$
a^x	$\frac{1}{p-\ln a}$
$\cos \omega x$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{ch} \omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{sh} \omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$x^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$