

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ "ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА"

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР (2009 г.). ЛЕКТОР А.Б.КОСТИН. КЗ-П.

I. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

1. Линейные формы (определение и примеры). Сопряженное пространство и его размерность.
2. Представление линейного функционала. Биортогональный базис и преобразование координат линейного функционала при изменении базиса.
3. Билинейные формы. Матрица билинейной формы, ее свойства и преобразование при переходе к новому базису.
4. Квадратичные формы в вещественном пространстве. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Теорема Лагранжа о приведении к каноническому виду.
5. Положительный, отрицательный индексы и дефект квадратичной формы, их инвариантность.
6. Классификация квадратичных форм в вещественном пространстве. Критерий знакоопределённости квадратичной формы.
7. Метод Якоби вычисления индексов инерции. Лемма о знаке старшего минора. Геометрическое определение индексов инерции.
8. Теорема Якоби вычисления индексов инерции. Критерий Сильвестра.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

9. Определение Евклидова и унитарного пространства, примеры. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
10. Матрица Грама системы векторов, ее определитель. Связь матриц Грама двух базисов.
11. Ортонормированный базис в Евклидовом (унитарном) пространстве. Теорема об ортогонализации Шмидта. Матрица перехода от ОНБ к ОНБ.
12. Ортогональное дополнение подпространств. Теорема о разложении в прямую сумму подпространств.
13. Линейные, полуторалинейные и билинейные формы в Евклидовом (унитарном) пространстве.
14. Сопряженный оператор и его свойства.
15. Нормальные операторы в унитарном пространстве и их свойства. Нормальные матрицы.
16. Самосопряженные операторы в унитарном пространстве и их свойства. Эрмитовы (симметричные) матрицы.
17. Ортогональные операторы и матрицы, их свойства. Ортогональные преобразования в одномерном и двумерном пространствах.
18. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в Евклидовом пространстве.
19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Теорема об одновременном приведении пары форм.
20. Разложение невырожденного линейного оператора в произведение ортогонального и самосопряженного.

III. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ.

21. Многочлен от матрицы и линейного оператора. Минимальный многочлен, его свойства. Теорема Гамильтона-Кэли.
22. Корневые векторы, корневые подпространства. Теорема об инвариантности корневого подпространства.

23. Теорема о прямой сумме корневых подпространств. Линейная независимость корневых векторов.
24. Теорема о разложении линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
25. Нильпотентные преобразования и их свойства. Циклические подпространства и циклический базис. Инвариантность циклического подпространства.
26. Жордановы цепочки. Нахождение начальных векторов цепочек.
27. Разложение корневого подпространства в прямую сумму циклических.
28. Жорданов базис линейного пространства для заданного линейного оператора. Вид матрицы линейного оператора в Жордановом базисе. Теорема Жордана.
29. Многочлен от матрицы. Равенство двух многочленов на спектре матрицы.
30. Функции от матриц. Многочлен Лагранжа-Сильвестра (б/д).