А. П. Г О Р Я Ч Е В

Ч И С Л О В Ы Е
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

к у р с   л е к ц и й

и варианты домашних заданий

М о с к в а   2 0 0 7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. П. ГОРЯЧЕВ

ЧИСЛОВЫЕ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

курс лекций

и варианты домашних заданий

Москва 2007

Числовые и функциональные ряды (курс лекций и варианты домашних заданий). М.: МИФИ, 2007. – 140 с.

Данное пособие предназначено для студентов второго курса всех факультетов. Здесь изложены (с подробными доказательствами) все необходимые студентам теоретические сведения, обычно рассматриваемые на лекциях при изучении тем "Числовые ряды" и "Функциональные последовательности и ряды". В конце большинства параграфов приведены 30 вариантов примеров, которые можно выдавать студентам в качестве домашнего задания. Все 30 вариантов приблизительно одинаковы по трудности.

Автор: А.П. Горячев

Рецензент:

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Оглавление

Предисловие

Настоящее пособие содержит в себе часть лекционного курса, читаемого автором на втором курсе факультета Т, а также варианты домашних заданий, которые можно использовать при проведении практических занятий и зачёта по этому курсу. Оно состоит из двух частей: “Числовые ряды” и “Функциональные последовательности и ряды”. В первой части изучаются основные фундаментальные понятия, относящиеся к *числовым* рядам. Используя связь рядов и последовательностей, изложены линейные свойства и критерий Коши сходимости числовых рядов; установлены также необходимый признак сходимости рядов и переместительное свойство сходящихся рядов. Доказано достаточно большое количество признаков сходимости *знакоположительных* рядов: признак сравнения, интегральный признак, признак Даламбера, радикальный признак Коши, признак Раабе, признак Куммера, признак Гаусса. Признаки сравнения, Даламбера, Коши, Раабе и Куммера выведены в допредельной и предельной формах. Также доказаны признаки сходимости *знакопеременных* рядов, связываемые обычно с именами Лейбница, Абеля и Дирихле. Введено понятие *суммирования* числовых рядов, включающее в себя обычную сходимость как один из способов постановки в соответствие ряду некоторого числа (обобщённой суммы).

Во второй части рассматриваются фундаментальные понятия, относящиеся к *функциональным* последовательностям и рядам, основным из которых является понятие *равномерной* сходимости. Получены необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности, критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда, необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда. Доказаны наиболее часто употребляемые признаки равномерной сходимости функциональных рядов, связываемые с именами Вейерштрасса, Абеля и Дирихле. Установлены следующие свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов: достаточные условия предельного перехода, сохранения непрерывности в точке и на множестве, почленного дифференцирования и интегрирования. Введено понятие *степенного* ряда как частного случая функционального ряда и изучено его множество сходимости. Также получены свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность суммы, единственность коэффициентов, почленное дифференцирование и интегрирование, поведение степенного ряда на конце интервала сходимости. Наконец, введено понятие *аналитической* функции и установлена аналитичность традиционно рассматриваемых функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$.

В конце каждого параграфа даются вопросы для повторения изложенного материала и самостоятельной работы, а также примеры, которые можно использовать в качестве домашних заданий.

Автор надеется, что это пособие окажется полезным студентам и преподавателям второго курса, так как в нём достаточно подробно дан тот теоретический материал, который излагается на лекциях как при изучении темы “Числовые ряды”, так и темы “Функциональные последовательности и ряды”.

Всех же, кто заинтересуется изложением вопросов, касающихся как числовых рядов, так и функциональных последовательностей и рядов, но не вошедших в настоящее пособие (например, бесконечные произведения, “квази-равномерная сходимость” и др.), можно отослать к вузовским учебникам и обширной специальной литературе. Приведём лишь некоторые из учебников.

1. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления.

2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа.

3. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ.

ЧАСТЬ I

Числовые ряды

1. Общие сведения, относящиеся к числовым рядам

Пусть задана некоторая числовая последовательность

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots \tag{1.2}$$

называется *числовым рядом*. При этом n-й член последовательности (1.1), то есть число a_n, называется n-м (*общим*) членом ряда, а сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \tag{1.3}$$

называется n-й частичной суммой ряда (1.2).

Отметим, что если в ряде (1.2) и, соответственно, в частичной сумме (1.3) суммирование начинается не с единицы, а с некоторого целого номера n_0, большего или меньшего единицы, тем не менее n-й общий член является функцией натурального аргумента n, а n-я частичная сумма заканчивается членом ряда a_n.

Бесконечной формальной сумме (1.2) можно придать неформальный смысл разными способами.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (конечное число), то ряд (1.2) называется *сходящимся*, а число S – его суммой. То, что числовой ряд сходится к *числу* S, записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$, то ряд (1.2) называется *расходящимся*, но можно соответственно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ \ (+\infty,\ -\infty).$$

Если же частичная сумма S_n не имеет *никакого* предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд (1.2) также называется *расходящимся*, но ему не приписывают *никакой* суммы.

Заметим, что добавление, отбрасывание, изменение некоторого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), но, разумеется (в случае сходимости), влияет на величину суммы ряда. Действительно, в этом случае частичные суммы исходного и изменённого рядов начиная с некоторого номера отличаются друг от друга на одну и ту же величину. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать суммирование в (1.2) и (1.3), начиная с единицы. Этим замечанием мы неоднократно будем пользоваться ниже.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots, \tag{1.4}$$

то есть ряд, общий член которого

$$a_n = q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

при различных значениях q. Как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ n + 1, & q = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Поэтому рассмотрение ряда (1.4) естественно разделяется на несколько случаев.

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, и, согласно (1.5), существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, то есть в этом случае ряд (1.4) сходится, причём $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Пусть $q > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$, и, согласно (1.5), предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть в этом случае ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.

3. Пусть $q < -1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$, причём этот символ ($\infty$) нельзя заменить ни на $+\infty$, ни на $-\infty$, так как q^{n+1}, неограниченно возрастая по абсолютной величине, становится попеременно то положительной, то отрицательной величиной. Таким образом, в этом случае ряд (1.4) расходится, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$, и символ ∞ нельзя заменить ни на $+\infty$, ни на $-\infty$.

4. Если $q = 1$, то, также как и при $q > 1$, ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$.

5. Если $q = -1$, то ряд (1.4) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{1.6}$$

Следовательно, его частичные суммы

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1,\ S_5 = 0, \ldots$$

не имеют предела, так как последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержит в себе подпоследовательности с номерами разной чётности, сходящиеся к *различным* числам $\left(\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = 1, \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = 0\right)$. Это означает, что ряд (1.6) (то есть ряд (1.4) при $q = -1$) расходится, но ему нельзя приписать никакой суммы.

Итак, мы получаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{array}{ll} \text{при } |q| < 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } |q| \geqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{1.7}$$

Так как сходимость (расходимость) числового ряда определена как сходимость (расходимость) последовательности его частичных сумм, то переформулировка теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых последовательностей приводит к справедливости нижеследующей теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых рядов.

Теорема 1.1. Для любых двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, суммы которых равны A и B соответственно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B;$$

а) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходятся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B;$$

б) для всякого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ – сходящийся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA.$$

В сходящемся числовом ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно (не меняя порядка слагаемых) расставлять скобки. При этом сумма ряда не изменится:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}) + \dots . \end{gathered} \tag{1.8}$$

Это утверждение сформулируем и докажем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Тогда для любой строго возрастающей последовательности $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ целых неотрицательных чисел

$$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_p < \dots$$

числовой ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$, общий член которого

$$b_p = a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

является сходящимся, причём $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ через $S_n^{(a)}$, а m-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ – через $S_m^{(b)}$. Тогда для всех натуральных p частичная сумма

$$\begin{gathered} S_p^{(b)} = b_1 + b_2 + \dots + b_p = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}) = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} + \\ +a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2} + \dots + \\ +a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p} = S_{k_p}^{(a)}, \end{gathered}$$

то есть последовательность $\{S_p^{(b)}\}$ является подпоследовательностью сходящейся (по условию) к числу S последовательности $\{S_n^{(a)}\}$. Поэтому $\lim\limits_{p\to\infty} S_p^{(b)} = S$. Теорема доказана.

Очевидно, что в сходящемся ряде (см. (1.8)) расставить скобки можно так, что в последнюю скобку войдут все члены этого ряда, начиная с некоторого номера:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p}) + (a_{k_p+1} + a_{k_p+2} + \cdots). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Действительно, внутри последних скобок записан сходящийся ряд (см. замечание на с. 9), сумма которого отличается от суммы исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на величину $\sum\limits_{n=1}^{k_p} a_n$.

В *расходящемся* ряде расстановка скобок вида (1.8) и (1.9) *недопустима*, так как может привести к неверным выводам. В самом деле, рассмотрим расходящийся ряд (1.6). Взяв в скобки каждую пару слагаемых, можно заключить, что сумма S ряда равна

$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

С другой стороны,

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1.$$

А если расставить скобки так:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S,$$

то получим, что $S = \dfrac{1}{2}$. Неверный вывод о том, что ряд может иметь три различные суммы или $0 = 1 = \dfrac{1}{2}$, был сделан из-за предположения, что расходящийся ряд (1.6) сходится.

Всякий числовой ряд (1.2) порождает числовую последовательность своих частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (1.3)). Но связь между рядами и последовательностями на самом деле двусторонняя: по всякой числовой последовательности можно построить ряд, частичными суммами которого будут элементы данной последовательности. Действительно, пусть имеется произвольная числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого

$$a_1 = u_1, \quad a_n = u_n - u_{n-1}, \;\; n = 2, 3, \ldots,$$

и найдём его частичные суммы. Мы имеем, что

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 = u_1, \quad S_2 = a_1 + a_2 = u_1 + (u_2 - u_1) = u_2, \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ = u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n, \end{gathered}$$

то есть $S_n = u_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, можно не только применять свойства последовательностей при изучении рядов (что уже делается), но и наоборот, свойства рядов применять для изучения последовательностей.

При исследовании сходимости числовых последовательностей используется *критерий Коши*. Сформулируем его для рядов, имея в виду последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм числового ряда (1.2).

Теорема 1.3 (критерий Коши для рядов). Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| < \varepsilon.$$

Отметим, что в специальном доказательстве эта теорема *не нуждается*, так как она ранее была доказана для *любых* числовых последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Т е о р е м а 1.4 (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что эту теорему можно вывести из критерия Коши для рядов (из теоремы 1.3). Также отметим, что при решении примеров этот признак, являясь *необходимым*, используется для доказательства *расходимости* исследуемого ряда. Так, при исследовании сходимости рядов (1.4), мы видим, что при $|q| \geqslant 1$ (случаи 2–5) предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ либо не существует, либо отличен от нуля, и поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ в этих случаях *расходится*.

С другой стороны, установив, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, мы не докажем *сходимости* ряда.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots , \tag{1.10}$$

называемый *гармоническим* рядом. Очевидно, что его общий член $a_n = \dfrac{1}{n}$ стремится к нулю, однако, как мы сейчас покажем, этот ряд расходится по теореме 1.3. Действительно, возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N рассмотрим $n = N + 1$ и $m = 2n$ (очевидно, что $m > n > N$). Но тогда $\Bigl|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| = \underbrace{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} \geqslant n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$, что и доказывает расходимость ряда (1.10).

2. Знакоположительные числовые ряды

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если для всякого n общий член $a_n \geqslant 0$.

Разумеется, согласно замечанию на с. 9 о том, что сходимость (расходимость) ряда не зависит от изменения конечного числа начальных слагаемых, достаточно считать, что неравенство $a_n \geqslant 0$ имеет место для всех n, начиная с некоторого номера n_0.

Теорема 2.1. Знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена сверху. При этом сумма ряда $S = \sup\{S_n\}$.

Доказательство. Частичная сумма $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$, то есть последовательность $\{S_n\}$ является возрастающей, а для таких последовательностей, как известно, критерием сходимости является ограниченность сверху. При этом предел последовательности равен её точной верхней грани. Теорема доказана.

Ясно, что если последовательность $\{S_n\}$ не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. В частности, сумма расходящегося гармонического ряда (1.10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{2.1}$$

Поэтому для знакоположительных рядов в качестве обозначения сходимости можно писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \tag{2.2}$$

Для *знакопеременных* рядов, то есть для таких рядов, в которых как угодно далеко встречаются и положительные, и отрицательные слагаемые, обозначение (2.2) (ограниченность частичных сумм) уже не эквивалентно сходимости, что показывает пример расходящегося ряда (1.6) с ограниченными частичными суммами.

Т е о р е м а 2.2 (признак сравнения). Пусть существует такой номер n_0, что

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как (см. замечание на с. 9) отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), то будем считать, что неравенство (2.3) справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (2.4) вытекает, что

$$A_n \leqslant B_n. \tag{2.5}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху. Поэтому из (2.5) следует, что последовательность $\{A_n\}$ также ограничена сверху, то есть (опять по теореме 2.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, что доказывает *первое* утверждение.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ и существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty). \tag{2.6}$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство $k - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{k}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что

$$\frac{k}{2}\, b_n < a_n < \frac{3k}{2}\, b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.7}$$

или, что то же самое,

$$\frac{2}{3k}\, a_n < b_n < \frac{2}{k}\, a_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.8}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда согласно теореме 1.1 ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2}\, b_n$ также сходится и с использованием второго из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2}\, b_n$ также (по теореме 1.1) расходится и, согласно первому из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то используя второе (первое) из неравенств (2.8), теорему 1.1 и теорему 2.2, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится (расходится). Следствие доказано.

Теорема 2.3 (интегральный признак Коши–Маклорена). Если при $x \geqslant 1$ функция $f(x) \geqslant 0$ и не возрастает, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2.9}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Обозначим через S_n частичные суммы ряда в (2.9). По условию

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad x \in [k, k+1], \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Интегрируя это двойное неравенство по переменной x от k до $k+1$ и используя очевидное равенство $\int\limits_{k}^{k+1} dx = 1$, имеем

$$f(k) \geqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Суммируя полученное двойное неравенство по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то есть

$$S_n \geqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1} - f(1). \tag{2.10}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Поэтому по первому из неравенств (2.10) следует, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также ограничена сверху. Но по условию $f(x) \geqslant 0$, следовательно, неубывающая функция $F(T) = \int\limits_1^{T} f(x)\,dx$ является ограниченной сверху, и поэтому существует $\lim\limits_{T\to+\infty} F(T)$, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$, а значит и последовательности $\{S_{n+1}\}$ и $\{S_{n+1} - f(1)\}$ не ограничены сверху. Поэтому по второму из неравенств (2.10) следует, что последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также не ограничена сверху, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*. Если же интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (расходится), то используя неравенство (2.10), неотрицательность и монотонность функции $f(x)$ и теорему 2.1, получаем, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится (расходится). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{2.11}$$

то есть ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ при различных значениях p. В частности, при $p = 1$ получается рассмотренный ранее гармонический ряд (1.10). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (этот предел есть либо $+\infty$ при $p < 0$, либо равен 1 при $p = 0$), поэтому ряд (2.11) расходится по необходимому признаку (см. теорему 1.4).

2. Пусть $p > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ при этих p (даже при $p \geqslant 0$) удовлетворяет условиям теоремы 2.3, а интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, как известно, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Следовательно в этом случае ряд (2.11) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

Объединяя эти два случая, получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.12}$$

Ряды вида (1.4) (при $q > 0$) и (2.11) дают достаточно много тестовых рядов для применения признаков сравнения (в допредельной и предельной формах) при исследовании на сходимость данного знакоположительного ряда (см. (1.7) и (2.12)). Однако можно осуществить сравнение с такими рядами в некоторой организованной форме.

Теорема 2.4 (признак Даламбера). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0, 1)$ и номер n_0 такие, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Имеем, что

$$a_{k+1} \leqslant q a_k, \quad k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots. \tag{2.13}$$

Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.13) для $k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leqslant q a_{n_0}, \\ a_{n_0+2} &\leqslant q a_{n_0+1}, \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots \\ a_n &\leqslant q a_{n-1}. \end{aligned}$$

Перемножая все эти неравенства и сокращая на отличное от нуля произведение $a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.14}$$

(Это неравенство, вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.) Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n$ *сходится* (см. (1.7) и теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. По условию

$$a_{k+1} \geqslant a_k, \quad k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$ имеет место цепочка неравенств

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_{n_0+1} \geqslant a_{n_0}.$$

Это означает, что

$$a_n \geqslant a_{n_0} > 0, \quad n \geqslant n_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{2.15}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Так как $a_n > 0$, то $q \geqslant 0$. Если q – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.16}$$

Пусть $q < 1$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно второму из неравенств (2.16) для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0,1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.4, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Если q – конечное число, то возьмём $\varepsilon = q - 1 > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно первому из неравенств (2.16) для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - (q-1) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $q = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

и поэтому, также как и в случае конечного $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по необходимому признаку. Следствие доказано.

Отметим, что если $q = 1$ или предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В частности, как для сходящихся, так и для расходящихся рядов вида (2.11) (то есть для любого $p \in (-\infty, +\infty)\big)$ предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Теорема 2.5 (радикальный признак Коши). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geqslant 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0, 1)$ и номер n_0 такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Возводя неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ в n-ю степень, получаем

$$a_n \leqslant q^n, \quad n \geqslant n_0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. Так как $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant \geqslant 1$, то и $a_{n_k} \geqslant 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (радикальный признак Коши в предельной форме). Если $a_n \geqslant 0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{2.17}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Так как $a_n \geqslant 0$, то $q \geqslant 0$. Если $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \in [0, 1)$, то по определению верхнего предела как крайней правой предельной точки последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.18}$$

Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно неравенству (2.18) для всех $n \geqslant n_0$ имеем:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0, 1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.5, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$ (q – конечное число или $q = +\infty$). Поскольку q – частичный предел последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, то существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q$. Так как $q > 1$, то найдётся номер k_0, начиная с которого $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то есть для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ натуральных чисел имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$. Поэтому согласно теореме 2.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следствие доказано.

Здесь, как и в случае предельной формы признака Даламбера, при $q = 1$ предельная форма признака Коши *не даёт* ответа о сходимости или расходимости исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В качестве примера также, как и ранее, можно рассмотреть ряды вида (2.11) для любого $p \in (-\infty, +\infty)$, у которых предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (а значит и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$).

Отметим также, что если при исследовании сходимости знакоположительного ряда по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши (в допредельной или предельной формах) делается вывод о *расходимости* ряда, то для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть не выполняется *необходимый* признак сходимости. Это замечание, подобно замечанию на с. 9, неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Можно установить (мы не будем этого делать), что радикальный признак Коши *сильнее* признака Даламбера, то есть если сходимость (расходимость) какого-то знакоположительного ряда можно установить по признаку Даламбера, то этот же результат можно получить и по радикальному признаку Коши. Однако в ряде примеров применение признака Даламбера бывает проще.

Теорема 2.6 (специальный признак сравнения). Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и существует такой номер n_0, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.19}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Доказательство. Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.19) для $k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} &\leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} &\leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &\leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}. \end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.20}$$

Неравенство (2.20), подобно неравенству (2.14), вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$ *сходится* (см. теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Также как при доказательстве теоремы 2.2, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2.7 (признак Раабе). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $r > 1$ и номер n_0 такие, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.21}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.22}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Из неравенства (2.21) следует

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.23}$$

Возьмём $p \in (1, r)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} = p$, то согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_1, такой, что для всех $n \geqslant n_1$ абсолютная величина разности $\left|\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} - p\right| < \varepsilon$, откуда вытекает, что для этих n имеет место следующее двойное неравенство

$$p - \varepsilon < \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} < p + \varepsilon, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.24}$$

Возьмём $\varepsilon = r - p > 0$. Тогда найдётся номер n_1, такой, что согласно второму из неравенств (2.24) для всех $n \geqslant n_1$ справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1 < \big[p + (r-p)\big] \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}\,,$$

то есть

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{r}{n}\,, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.25}$$

Из (2.23) и (2.25) следует, что для всех $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^p}, \quad n \geqslant n_2. \tag{2.26}$$

Так как $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^p$ сходится (см. (2.12)). Поэтому из (2.26) вытекает, что согласно теореме 2.6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.22) следует, что при $n \geqslant n_0$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.27}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится (см. (1.10) или (2.12)). Поэтому из (2.27) вытекает, что согласно теореме 2.6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е (признак Раабе в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r, \tag{2.28}$$

то при $r > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $r < 1$ этот ряд расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если r – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина

$\left| n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - r \right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$r - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.29}$$

Пусть $r > 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{r-1}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно первому из неравенств (2.29) для всех $n \geqslant n_0$ имеет место

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r - \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2} = r_1 > 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же $r = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 2$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится по теореме 2.7.

Пусть $r < 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = 1 - r > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно второму из неравенств (2.29) для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + (1 - r) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $r = -\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по теореме 2.7. Следствие доказано.

Отметим, что если $r = 1$ или предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сравнивая предельные формы признаков Даламбера и Раабе, мы видим, что признак Раабе гораздо *сильнее* признака Даламбера. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = Q = \dfrac{1}{q} \neq 1$ (при этом если $q = 0$, то $Q = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $Q = 0$), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ равен $+\infty$ при $q < 1$ и $-\infty$ при $q > 1$. Таким образом, если предельная форма признака Даламбера даёт ответ о сходимости (расходимости) исследуемого ряда, то предельная форма признака Раабе и подавно его даёт: мы получаем, что $r = +\infty$ в случае сходимости согласно предельной форме признака Даламбера и $r = -\infty$ в случае расходимости. Для всех остальных $r \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, также согласно предельной форме признака Раабе дающих ответ о сходимости (расходимости) ряда, признак Даламбера ответа не даёт, потому что в этом случае $q = 1$.

Теорема 2.8 (признак Куммера). Пусть числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$c_n > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty, \tag{2.30}$$

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Тогда для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $d > 0$ и номер n_0 такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant d \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.31}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.32}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Согласно замечанию на с. 9, не ограничивая общности можно считать, что неравенство (2.31) выполняется для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Умножая это неравенство на $a_{n+1} > 0$, получаем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant d \cdot a_{n+1}. \tag{2.33}$$

Отсюда вытекает, что $b_n \equiv c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$, то есть последовательность $\{c_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго убывает, а так как $c_n a_n > 0$, то эта последовательность имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = b \geqslant 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, так как последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, поскольку $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 a_1 - c_2 a_2 + c_2 a_2 - c_3 a_3 + \dots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$ стремится к числу $c_1 a_1 - b$. Но тогда из неравенства (2.33) по теореме 2.2 вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d \cdot a_{n+1}$, а отсюда и из теоремы 1.1 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.32) вытекает

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}}}{\dfrac{1}{c_n}}, \quad n \geqslant n_0.$$

Отсюда и из (2.30) по теореме 2.6 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е (признак Куммера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = d, \tag{2.34}$$

где $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2.30), то при $d > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $d < 0$ этот ряд расходится.

Доказательство предельной формы признака Куммера можно осуществить по той же схеме, что и доказательства предельных форм признаков Даламбера (следствие из теоремы 2.4) и Раабе (следствие из теоремы 2.7), и поэтому оно *не приводится*.

Отметим, что если предел в (2.34) не существует, или его величина $d = 0$, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (может быть, для исследования надо взять какую-либо другую последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую (2.30)).

Установим, что в признаке Куммера при надлежащем подборе последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержатся признаки Даламбера и Раабе. Ограничимся для простоты лишь *предельными* формами.

Возьмём $c_n = 1$. Ясно, что условие (2.30) выполняется, а равенство (2.34) переходит в равенство (2.15) на с. 24. При этом $d = \dfrac{1}{q} - 1$ (если $q = 0$, то $d = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $d = -1$). Таким образом, из признака Куммера получился признак Даламбера, так как из сходимости (расходимости) ряда по признаку Даламбера вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Возьмём $c_n = n$. Ясно, что условие (2.30) выполняется, а равенство (2.34) переходит в равенство (2.28) на с. 31. При этом $d = r - 1$. Таким образом, из признака Куммера получился признак Раабе, так как из сходимости (расходимости) ряда по признаку Раабе вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Дополним ряды вида (1.4) (при $q > 0$) и (2.11), используемые для сравнения при исследовании сходимости знакоположительных рядов ещё одной группой рядов. Так как интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$, переходящий после замены переменного $\ln x = t$ в интеграл $\int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, то отсюда и из интегрального признака (теорема 2.3) вытекает, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.35}$$

Т е о р е м а 2.9 (признак Гаусса). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, найдутся номер n_0 и числа λ, μ, $\alpha > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}, \quad |\theta_n| \leqslant C \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.36}$$

то

1) при $\lambda > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

4) при $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.36) вытекает, что предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{\lambda}$ (если $\lambda = 0$, то $q = +\infty$). Поэтому согласно признаку Даламбера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.4) первое и второе утверждения настоящей теоремы установлены.

Пусть $\lambda = 1$. В этом случае из (2.36) вытекает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\mu + \dfrac{\theta_n}{n^\alpha}\right) = \mu$. Поэтому согласно признаку Раабе в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Следовательно третье утверждение настоящей теоремы и её четвёртое утверждение при $\mu < 1$ установлены.

Пусть теперь $\lambda = \mu = 1$. Рассмотрим ряд (2.35) при $p = 1$, то есть *расходящийся* ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$, в котором $c_n = n\ln n$. Согласно (2.36) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\ln n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}\right) - (n+1)\ln(n+1)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln n + \frac{\theta_n \ln n}{n^\alpha} - (n+1)\ln(n+1)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \theta_n \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}\right] = -1$$

(в том, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = -1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, легко убедиться, вычислив пределы $\lim\limits_{u\to 0+0}\dfrac{\ln(1-u)}{u} = -1$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$, например, по правилу Лопиталя). Поэтому согласно признаку Куммера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.8) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следовательно, четвёртое утверждение настоящей теоремы окончательно установлено. Теорема доказана.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим более подробно поведение частных сумм гармонического ряда (1.10). Обозначим

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \tag{2.37}$$

и введём числовую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n. \tag{2.38}$$

Из первого из неравенств двойного неравенства (2.10), полученного при доказательстве теоремы 2.3, для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, очевидно, удовлетворяющей условиям этой теоремы, имеем, что $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} \geqslant \int\limits_1^{n+1} \dfrac{dx}{x} = \ln(n+1)$, то есть $x_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n > 0$ для всех номеров n. Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена снизу*. Далее, согласно (2.38), разность $x_{n+1} - x_n = \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \right.$ $\left. + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right] =$ $= \dfrac{1}{n+1} + \ln\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Эта сумма *отрицательна* вследствие того, что у функции $f(x) = \ln(1+x)$ вторая производная $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, и поэтому кривая $y = \ln(1+x)$ *строго выпукла вверх*, то есть лежит *ниже* любой своей касательной, в том числе касательной, проходящей через точку $(0;0)$. Итак, $x_{n+1}-x_n<0$, то есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотонно *убывает*, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = C. \tag{2.39}$$

Величина C носит название *постоянной Эйлера*. Из (2.39), в частности, вытекает, что

$$H_n \sim \ln n,$$

то есть частные суммы H_n гармонического ряда (1.10) с ростом n возрастают как $\ln n$.

Варианты домашних заданий

Исследовать на сходимость.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{n-1}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^{n-1}+1}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n-1}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{2^n}.$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\,.$

10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}\,.$

11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\,.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\,.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}\,.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\,.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}\,.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right).$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right).$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\ln\left(1+\frac{e}{n}\right).$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\,n!}{n^n}\,.$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n+1}\,.$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2n-1}\,.$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n^2+1)}\,.$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right).$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{n}\,.$

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{\ln n}\,.$

28. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\pi}-1}{\ln^2 n}\,.$

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln^2 n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}+1}$.

3. Знакопеременные числовые ряды

В этом параграфе мы рассмотрим *знакопеременные* числовые ряды – ряды, в которых как угодно далеко встречаются как положительные, так и отрицательные слагаемые, то есть для всякого N найдутся номера $n_1 > N$ и $n_2 > N$, такие, что $a_{n_1} > 0$, $a_{n_2} < 0$.

Дело в том, если положительные и отрицательные слагаемые встречаются лишь до определённого номера, а затем знак членов ряда стабилизируется, то после отбрасывания нескольких первых членов ряда (что, как уже отмечалось на с. 9, не влияет на сходимость ряда, а влияет лишь на сумму ряда в случае его сходимости) мы получаем либо *знакоположительный* ряд, либо ряд *знакоотрицательный*, который становится знакоположительным после вынесения общего знака “минус” за знак суммы. Знакопеременные ряды уже упоминались на с. 17, когда шла речь о том, что для знакоположительного ряда сходимость эквивалентна ограниченности его частичных сумм.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Это понятие, разумеется, можно рассматривать для *любого* ряда, но интерес оно представляет лишь для ряда знакопеременного, так как для знакоположительного ряда абсолютная сходимость тождественна сходимости.

Теорема 3.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

также сходится.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то для него выполняется критерий Коши (см. теорему 1.3), то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$. Но тогда для этих же номеров n и m абсолютная величина суммы $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$. Отсюда по той же теореме 1.3 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Теорема доказана.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – знакоположительный ряд, поэтому для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ на абсолютную сходимость можно применять признаки сходимости, установленные для знакоположительных рядов. Как мы видели, доказывая утверждения предыдущего параграфа, очень часто бывает так: выполнение некоторого условия даёт сходимость ряда, а невыполнение – расходимость. Для знакопеременных рядов, как мы увидим ниже, чаще всего ситуация такая: если выполняется условие какого-то признака, то ряд сходится, а если не выполняется, то вопрос о сходимости остаётся открытым. Далее, признаки сходимости знакопеременных рядов, давая положительный ответ на вопрос о сходимости ряда, оставляют открытым ответ на вопрос о *характере* этой сходимости, то есть *как* сходится ряд: абсолютно или условно. Разумеется, если при исследовании ряда на абсолютную сходимость мы получили, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится по необходимому ($\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, теорема 1.4) признаку (а это имеет место, в частности, в признаке Даламбера и радикальном признаке Коши, но не в признаках Раабе, Куммера или Гаусса!), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по необходимому признаку ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$). Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по теореме 1.4 предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; но тогда и предел $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Рассмотрим вначале достаточные условия сходимости так называемых *знакочередующихся* рядов, то есть таких, члены которых поочерёдно то неотрицательны, то неположительны.

Т е о р е м а 3.2 (признак Лейбница). Если числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает и стремится к нулю:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{3.1}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, u_n$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $a_n = (-1)^{n-1}\, u_n$, сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.1) следует, что $u_n \geqslant 0$. Рассмотрим частичную сумму чётного порядка $S_{2m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} = u_1 - u_2 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m}$. Мы видим, что $S_{2m+2} = S_{2m} + u_{2m+1} - u_{2m+2} \geqslant S_{2m}$. С другой стороны, $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leqslant u_1$. Таким образом, последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ монотонно не убывает и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но частичная сумма нечётного порядка $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$, следовательно, согласно (3.1) существует и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$. Отсюда вытекает, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится к сумме S. Теорема доказана.

Следствие (оценка остатка знакочередующихся рядов). Пусть выполняются условия теоремы 3.2 и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S$. Тогда

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}. \tag{3.2}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.2 получено, что частичные суммы чётного порядка S_{2m}, монотонно не убывая, стремятся к сумме ряда S. С другой стороны, $S_{2m+1} = S_{2m-1} - (u_{2m} - u_{2m+1}) \leqslant S_{2m-1}$, то есть частичные суммы нечётного порядка стремятся к тому же числу S, монотонно не возрастая. Поэтому для всякого m справедливы следующие неравенства

$$S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m-1}, \tag{3.3}$$

$$S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m+1}. \tag{3.4}$$

Из двойного неравенства (3.3), как нетрудно видеть, следует, что

$$0 \leqslant S_{2m-1} - S \leqslant S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m}, \tag{3.5}$$

а из (3.4), в свою очередь, вытекает

$$0 \leqslant S - S_{2m} \leqslant S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1}. \tag{3.6}$$

Из неравенства (3.5) при нечётных n и из неравенства (3.6) при чётных n вытекает неравенство (3.2). Следствие доказано.

Неравенство (3.2) используется при приближённых вычислениях с помощью рядов, так как даёт возможность оценить количество слагаемых в знакочередующемся ряде с монотонно (по абсолютной величине) невозрастающими членами, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$: нужно взять столько слагаемых, чтобы абсолютная величина *первого отброшенного* слагаемого была меньше ε.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots, \quad (3.7)$$

называемый *рядом Лейбница*. Общий член этого ряда $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, при этом $u_n = |a_n| = \frac{1}{n}$. Ряд (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2, следовательно, он *сходится*, его сходимость – *условная*, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – *расходящийся* гармонический ряд (1.10). Найдём сумму этого ряда. Согласно (2.37) и (2.38) имеем, что частичные суммы ряда (3.7) с чётными номерами $S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m}\right) = H_{2m} - H_m = x_{2m} + \ln(2m) - x_m - \ln m = x_{2m} - x_m + \ln 2$. Следовательно, из (2.39) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} (x_{2m} - x_m + \ln 2) = C - C + \ln 2 = \ln 2$. Поскольку, как уже отмечалось, ряд (3.7) сходится, то вся последовательность его частичных сумм, а не только подпоследовательность частичных сумм с чётными номерами, сходится к $\ln 2$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{3.8}$$

Отметим, что в формулировке признака Лейбница условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является не только одним из достаточных, но и *необходимым*, так как его невыполнение приводит к расходимости ряда по теореме 1.4. Условие *монотонности*, вообще говоря, необходимым *не является*. Но отбросить это условие всё же нельзя.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + & \cdots + & \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} + & \cdots \\ 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n & \ldots \end{array} \tag{3.9}$$

(под каждым слагаемым для наглядности записан его номер). У этого знакочередующегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является монотонной. Нетрудно видеть, что ряд (3.9) – *расходящийся*, так как согласно (2.1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{k}+1} \right) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{2}{k-1} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} \right) = +\infty.$

Для получения других признаков, которые можно применять не только к знакочередующимся, но и к другим знакопеременным рядам, рассмотрим *преобразование Абеля*.

Пусть имеются две числовые последовательности: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим через $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$B_1 = b_1, \ \ B_2 = b_1 + b_2, \ \ldots, \ B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k, \ldots .$$

Тогда для любых номеров m и n, таких, что $m > n$, имеем

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{m-1}b_{m-1} + a_m b_m =$$
$$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \ldots + a_m(B_m - B_{m-1}) =$$
$$= -a_{n+1}B_n + (a_{n+1} - a_{n+2})B_{n+1} + \ldots + (a_{m-1} - a_m)B_{m-1} + a_m B_m =$$
$$= -a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_m B_m, \qquad \text{то есть}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})B_k. \tag{3.10}$$

Эта формула и называется преобразованием Абеля. Она является аналогом формулы интегрирования по частям в определённых интегралах: производная заменена разностью, а первообразная – суммой.

Формуле (3.10) можно придать и несколько более общий вид. Пусть D – произвольное число, тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m(B_m - D) - a_{n+1}(B_n - D) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})(B_k - D). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Действительно, правая часть формулы (3.11) отличается от правой часть формулы (3.10) на величину

$$D\Big[-a_m + a_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})\Big] =$$
$$= D(a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots - a_{m-1} + a_m - a_m) = 0.$$

При этом аналогия с формулой интегрирования по частям сохраняется: первообразная заменена другой, отличающейся на константу.

Теорема 3.3 (признак Дирихле). Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех k абсолютная величина $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\right| \leqslant M$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.12}$$

сходится.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.13}$$

Поэтому $a_n \geqslant 0$ и, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$0 \leqslant a_n < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad n > N. \tag{3.14}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.10), формулы (3.13) и неравенства (3.14) вытекает, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant |a_m B_m| + |a_{n+1} B_n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})M = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$
$$+ M(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m) =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_m) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + Ma_{n+1} < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда (3.12) выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Теорема 3.4 (признак Абеля). Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то есть найдётся $K > 0$, что для всех n абсолютная величина $|a_n| \leqslant K$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

Доказательство. Также как и при доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \quad |a_n| \leqslant K. \tag{3.15}$$

Обозначим сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ через B, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Так как $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, где $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3K}, \quad n > N. \tag{3.16}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.11) при $D = B$, формулы (3.15) и неравенства (3.16) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\Big| \leqslant |a_m(B_m - B)| + |a_{n+1}(B_n - B)| +$$

$$+ \Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - B)\Big| < K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot \frac{\varepsilon}{3K} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3K}\,(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m) =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K}\,(a_{n+1} - a_m) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K}\max(|a_{n+1}|, |a_m|) <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Отметим, что из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

Выведем признак Абеля. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены в совокупности, а так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a + a) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n.$$

Первый ряд сходится по признаку Дирихле (по теореме 3.3), а второй – по теореме 1.1.

Выведем признак Лейбница. Обозначим $a_n = u_n$, $b_n = (-1)^{n-1}$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, попеременно равные 1 или 0, ограничены в совокупности. Следовательно, знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница (теоремы 3.2), сходится по признаку Дирихле.

Пример. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{3.18}$$

при различных значениях x и некоторых условиях на ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть этот ряд сходится абсолютно, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty. \tag{3.19}$$

Так как

$$|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

то при выполнении условия (3.19) ряды (3.17) и (3.18) сходятся абсолютно для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастая стремится к нулю, причём знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то есть

$$
\begin{gathered}
a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \\
\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.
\end{gathered} \tag{3.20}
$$

Рассмотрим вначале ряд (3.17). Так как при $x = 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, значения $\cos nx = 1$, то из (3.20) следует, что для этих x ряд (3.17) расходится. Пусть $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Тогда $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ и поэтому

$$
\begin{aligned}
&\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \right. \\
&\left. + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right],
\end{aligned}
$$

то есть

$$
\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{3.21}
$$

Отсюда следует, что справедлива следующая оценка

$$
|\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{3.22}
$$

Из (3.20) и (3.22) вытекает, что для исследуемого ряда выполняются все условия теоремы 3.3, поэтому ряд (3.17) при $x \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, сходится по признаку Дирихле.

Выясним *характер* сходимости этого ряда. Если $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n |(-1)^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то есть при $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ряд (3.17) сходится условно. Для остальных значений x $(x \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$ заметим, что поскольку $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $|\cos\alpha| \geqslant \cos^2\alpha$, и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \cos 2nx). \quad (3.23)$$

Последний ряд состоит из двух рядов, первый из которых $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ расходится, а второй $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx\right)$ сходится по признаку Дирихле так как при $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ можно, аналогично оценке (3.22), получить оценку

$$|\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}\,.$$

Сумма двух рядов, один из которых сходится, а второй – расходится, есть ряд *расходящийся* (если бы это был сходящийся ряд, то по теореме 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже был бы сходящимся). Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx$ расходится. Поэтому из (3.23) вытекает, что согласно признаку сравнения (по теореме 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ расходится, то есть ряд (3.17) сходится условно. Итак, мы получили, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \begin{array}{lll} \text{при } x = 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{расходится}, \\ \text{при } x \neq 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{сходится условно}. \end{array} \quad (3.24)$$

Теперь рассмотрим ряд (3.18) при условии (3.20). При $x = m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$, этот ряд состоит из нулей и поэтому для этих значений x сходится абсолютно. При остальных x, аналогично рассмотрению ряда (3.17), можно вывести формулу

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}},$$

получить оценку

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|},$$

и убедиться, что при $x \neq m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ ряд (3.18) сходится по признаку Дирихле. Для исследования характера сходимости установим (аналогично (3.23)), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-\cos 2nx).$$

Отсюда следует отсутствие абсолютной сходимости, то есть *условная* сходимость. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \begin{array}{l} \text{при } x=m\pi \ (m\in\mathbb{Z}) \text{ сходится абсолютно,} \\ \text{при } x\neq m\pi \ (m\in\mathbb{Z}) \text{ сходится условно.} \end{array} \tag{3.25}$$

Отметим, что признак сравнения (теорема 2.2 и следствие из неё), установленный для знакоположительных рядов, не имеет места для рядов знакопеременных.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right], \tag{3.26}$$

то есть такой числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\,.$$

Обозначим

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\,, \quad c_n = \frac{1}{n}\,.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходящийся гармонический ряд. Поэтому ряд (3.26) расходится как сумма двух рядов ($a_n = b_n + c_n$), один из которых сходится, а другой – расходится. Однако предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right] = 1.$$

Легко проверить, что ряд (3.26), подобно ряду (3.9), является примером того, что требование монотонности в признаке Лейбница *существенно*.

В первом параграфе мы видели, что сочетательный закон, справедливый для сходящихся рядов, не всегда верен для расходящихся (см. теорему 1.2, доказанную для сходящихся рядов и следующая после неё иллюстрация неприменимости этой теоремы для расходящихся рядов). Сейчас будет показано, что переместительный закон не всегда справедлив даже для сходящихся рядов. Рассмотрим сходящийся ряд Лейбница (3.7), сумма которого $S = \ln 2$ (см. (3.8)), и переставим его слагаемые так: два положительных слагаемых, одно отрицательное, два положительных, одно отрицательное, и так далее, то есть рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\cdots\,, \quad (3.27)$$

члены которого разбиты на группы по три слагаемых в каждой; в m-й группе два положительных слагаемых $\left(\frac{1}{4m-3}\right.$ и $\left.\frac{1}{4m-1}\right)$ и одно отрицательное $\left(-\frac{1}{2m}\right)$. Найдём сумму ряда (3.27) тем же путём, каким была найдена сумма ряда (3.7). Согласно (2.37) и (2.38) имеем, что частичные суммы S_{3m} ряда (3.27) равны $S_{3m}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+$ $+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\right.$ $\left.+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}+\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}\right)-$ $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)=H_{4m}-\frac{1}{2}\,H_{2m}-\frac{1}{2}\,H_m=x_{4m}+\ln(4m)-$ $-\frac{1}{2}[x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m]=x_{4m}+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}$.

Отсюда и из (2.39) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty}S_{3m}=\lim\limits_{m\to\infty}\Big\{x_{4m}+$ $+\ln(4m)-\frac{1}{2}\,[x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m]\Big\}=\lim\limits_{m\to\infty}\Big[x_{4m}+$ $+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}\Big]=C+\ln 4-\frac{C+\ln 2+C}{2}=\frac{3}{2}\ln 2.$

Ясно, что предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{3m+1}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{4m+1}\right)=\frac{3}{2}\ln 2$

и предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m+2} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m+1} + \dfrac{1}{4m+3}\right) = \dfrac{3}{2}\ln 2$. Это означает, что ряд (3.27) сходится к $\dfrac{3}{2}\ln 2$, то есть

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\dots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Как видим, от такой перестановки сумма ряда (3.7) увеличилась в полтора раза.

Сообщим без доказательства, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ какой-либо перестановкой его слагаемых, также сходится, причём к *той же* сумме. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *условно*, то его слагаемые можно так переставить, что полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет сходиться к любому наперёд заданному числу S. А можно будет так переставить слагаемые, что полученный в результате перестановки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет расходиться к $+\infty$, или расходиться к $-\infty$, или даже *ограниченно* расходиться, то есть частичные суммы расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будут ограничены.

Варианты домашних заданий

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{n^2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(-3)^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^n}{(2n-1)^{n-1}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n+\dfrac{1}{2n}\right)$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{5n-2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1-2n}{2+3n}\right)^n$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n+\dfrac{2}{n\sqrt{n}}\right)$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^2}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\ln n}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3-1}}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\ln^2 n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1-\dfrac{3}{n}\right)$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\right]^n$.

24. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\ln^n\left(1-\dfrac{3}{n}\right)$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^n\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right]$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^n\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right]$.

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$.

30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^n\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$.

4. Суммирование числовых рядов

В этом параграфе мы кратко ознакомимся с тем, что существуют и иные, помимо сходимости последовательности частичных сумм, способы, позволяющие поставить в соответствие числовому ряду какое-либо число, то есть придать неформальный смысл бесконечной сумме (1.2) каким-то другим путём, не обязательно совпадающим с изучаемым до сих пор: предел последовательности частичных сумм.

Если указан способ T, позволяющий некоторым числовым рядам поставить в соответствие S – число или какой-либо из бесконечных символов, то T называется *методом суммирования*, а S – *обобщённой суммой*.

Применение метода T к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и результат этого применения будем обозначать так: $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$.

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы.

1. *Сходимость.* Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и результатом применения метода T называется предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$ и метод суммирования совпадает с обычной сходимостью. Однако надо иметь в виду, что есть и другие методы.

2. Любому ряду поставим в соответствие число 0, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 0$ и метод суммирования применúм к любому ряду.

3. Любому ряду поставим в соответствие число 1, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 1$ и метод суммирования также применúм к любому ряду.

4. *Метод средних арифметических.* Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, их средние арифметические $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ и результатом применения метода T называется предел $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = \sigma$.

Определение метода средних арифметических, называемого также методом $(H, 1)$, даёт возможность получить на его основе другие методы суммирования. Например, можно найти средние арифметические средних арифметических $\tau_n = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n}{n}$ и найти предел $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$ (это уже будет метод $(H, 2)$), получить метод $(H, 3)$ и так далее. Обычную сходимость тогда можно назвать методом $(H, 0)$. Можно вводить в рассмотрение и какие-то иные методы суммирования.

Метод суммирования T называется *линейным*, если из применимости его к двум рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, обобщённые суммы которых $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = A$ и $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = B$ – конечные числа, следует применимость этого метода к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ для любых α и β, причём $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)\Big) = \alpha A + \beta B$.

Метод суммирования T называется *регулярным*, если он применим к любому сходящемуся (к конечной сумме) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$.

Регулярный метод суммирования T называется *вполне регулярным*, если он применим к любому расходящемуся к $+\infty$ или к $-\infty$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = +\infty\ (-\infty)$.

Применим эти понятия (линейность, регулярность, полная регулярность) к методам суммирования, которые введены в рассмотренных выше примерах.

1. Очевидно, что сходимость – линейный вполне регулярный метод.

2. Очевидно, что этот метод линейный, но нерегулярный.

3. Здесь очевидно, что этот метод не является ни линейным, ни регулярным.

4. Метод средних арифметических, очевидно, является линейным. Он также является регулярным и даже вполне регулярным. Чтобы в этом убедиться, докажем две теоремы.

Теорема 4.1. Метод средних арифметических регулярен.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу S: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Следовательно, предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, такой, что для всех $n > N_1$ абсолютная величина $|S_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_1} |S_k - S|$ и выберем номер N_2 так, что $\dfrac{MN_1}{N_2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$|\sigma_n - S| = \left|\frac{S_1 + \dots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \dots + S_n}{n} - S\right| =$$

$$= \left|\frac{S_1 - S + \dots + S_{N_1} - S + S_{N_1+1} - S + \dots + S_n - S}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|S_1 - S| + \dots + |S_{N_1} - S|}{n} + \frac{|S_{N_1+1} - S| + \dots + |S_n - S|}{n} <$$

$$< \frac{MN_1}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n}.$$

В последней сумме первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, так как номер $n > N_2$, а второе слагаемое не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, поскольку $\frac{n - N_1}{n} \leqslant 1$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что для всех $n > N$ абсолютная величина $|\sigma_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Метод средних арифметических вполне регулярен.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, метод средних арифметических линеен, поэтому достаточно установить, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится к $+\infty$, то он и суммируется к $+\infty$. Итак, пусть предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N_1, такой, что для всех $n > N_1$ частичная сумма $S_n > 2M$. Обозначим $m = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_1} |S_k|$ и выберем номер N_2 так, что отношение $\frac{N_1(m + 2M)}{N_2} < M$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \dots + S_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{S_{N_1+1} + \dots + S_n}{n} - \frac{mN_1}{m} > \frac{2M(n - N_1)}{n} - \frac{mN_1}{n} =$$

$$= 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} > 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} = 2M - M = M,$$

то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N, такой, что для всех $n > N$ величина $\sigma_n > M$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Теорема доказана.

Таким образом, метод средних арифметических суммирует любой ряд, сумма S которого либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, к той же самой сумме. Но некоторые *расходящиеся* ряды этот метод также суммирует. Рассмотрим расходящийся ряд (это переобозначенный ряд (1.6)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots. \tag{4.1}$$

Так как его частичные суммы $S_n = \begin{cases} 1, & n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

то $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1}, & n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{2}, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2}$, то ряд (4.1) суммируется методом средних арифметических к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Разумеется, имеются и ряды, *не суммируемые* методом средних арифметических. Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots. \tag{4.2}$$

Его частичные суммы $S_n = \begin{cases} m, & n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ -m, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Таким образом, ряд (4.2) расходится к ∞, причём эту бесконечность без знака нельзя отождествить ни с $+\infty$, ни с $-\infty$. Здесь $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1}\,, & n = 2m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$ поэтому последовательность $\{\sigma_n\}$ не имеет предела ($\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m-1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m} = 0$), то есть ряд (4.2) не суммируется методом средних арифметических (методом $(H,1)$). Можно показать, что этот ряд суммируется методом $(H,2)$ к $\dfrac{1}{4}$, но мы не будем на этом останавливаться. Отметим лишь, что ряд (4.2) является примером того, что не всякий линейный вполне регулярный метод суммирует к ∞ ряды, расходящиеся к ∞ (методом $(H,1)$ он вообще не суммируется, а методом $(H,2)$ суммируется к конечному числу).

Не все свойства сходящихся рядов переносятся на методы суммирования (даже если ограничиться, естественно, линейными вполне регулярными методами). Так, если в сходящийся ряд добавить нули, то ряд останется сходящимся, притом к той же сумме. Иначе дело может обстоять для расходящихся, пусть и суммируемых рядов. Добавим в ряд (4.1) нули, поставив их после каждой пары слагаемых $+1-1$:

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \cdots\,. \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что для этого ряда средние арифметические $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{3m-2}\,, & n = 3m-2,\, m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{m}{3m-1}\,, & n = 3m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{3}\,, & n = 3m, \quad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{3}$, следовательно, ряд (4.3) суммируется методом $(H,1)$ к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{2}$.

Также отметим, что в ряд (4.1) можно так добавить нули, что полученный ряд вообще перестанет суммироваться методом средних арифметических.

Заканчивая этот параграф, отметим, что по аналогии с суммированием числовых рядов можно ввести обобщённую сходимость несобственных интегралов и для неё определить линейность, регулярность, полную регулярность. Мы не будем давать их точных определений, а лишь выпишем формулы, соответствующие методу средних арифметических для интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, у которого $+\infty$ – единственная особая точка. Итак, пусть имеется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Величину предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-a}\int\limits_a^x F(t)\,dt$, если это или конечное число, или $+\infty$, или $-\infty$, назовём обобщённым значением несобственного интеграла (4.4). Можно доказать, что в случае сходимости несобственного интеграла (4.4) или в случае его расходимости к $+\infty$ (к $-\infty$) его обобщённое значение совпадает с пределом $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то есть обычным значением этого несобственного интеграла. Однако обобщённое значение может существовать и в том случае, когда интеграл (4.4) *расходится*. Например, для расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$

имеем, что $F(x) = \int\limits_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x$, и поэтому величина предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x F(t)\, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x (1 - \cos t)\, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1$. Итак, мы получили, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$ равно 1. Совершенно аналогично можно установить, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$ равно 0.

ЧАСТЬ II

Функциональные последовательности и ряды

Здесь будут изучаться *функциональные* последовательности и ряды, то есть такие последовательности и ряды, элементами которых являются уже не числа, а *функции*. Мы ограничимся случаем функций, зависящих от одной переменной x, хотя результаты, которые будут получены, как правило, справедливы в более общем случае. Так же как в случае числовых последовательностей и рядов, начальный элемент n_0 функциональной последовательности или начальное значение индекса суммирования функционального ряда может быть как больше, так и меньше единицы.

5. Множество сходимости

Итак, мы будем изучать последовательности

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.1}$$

и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{5.2}$$

элементы которых $f_n(x)$ (и, соответственно, $u_n(x)$) – некоторые *функции* одной переменной x.

Множество X называется *множеством сходимости* функциональной последовательности (5.1) (функционального ряда (5.2)), если, во-первых, на множестве X для всех n определены функции $f_n(x)$ $\big($определены функции $u_n(x)\big)$ и, во-вторых, для каждого $x_0 \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\Big)$.

Аналогично для ряда (5.2) можно определить множества абсолютной и условной сходимости.

Пусть X – множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть для всякого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Этот предел, естественно, зависит от точки $x \in X$, поэтому обозначим его

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Функцию $f(x)$ называют *предельной* функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично, если X – множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (неважно какой, абсолютной или условной), то на множестве X можно ввести понятие *суммы* ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Разумеется, если изучать лишь сходимость и величину предела (суммы) у последовательности (5.1) и у ряда (5.2) в фиксированной точке $x \in X$, то при этом не будет ничего нового по сравнению с изучением этих вопросов для *числовых* последовательностей и рядов с параметром x. Новизна появляется, например, при изучении условий (достаточных, необходимых) сохранения или появления тех или иных *функциональных свойств* у предельной функции функциональной последовательности либо суммы функционального ряда, таких как непрерывность, дифференцируемость и тому подобное.

П р и м е р ы. Во всех рассматриваемых примерах множество $X = [0, 1]$, а $f(x)$ – предельная функция функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

1. $f_n(x) = x^n, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

2. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}\,, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

3. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}\,, \qquad f(x) \equiv 0.$

4. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}\,, \qquad f(x) \equiv 0.$

5. $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, \qquad f(x) \equiv 0.$

Легко проверить, что предельная функция $f(x)$ имеет указанный вид. Таким образом, в последних трёх примерах при предельном переходе непрерывность сохранилась, а в первых двух примерах – нет.

Варианты домашних заданий

Найти множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда, точнее, всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$ разбить на четыре непересекающихся множества: множество, где ряд *не определён*; множество, где ряд *расходится*; множество, где ряд *сходится абсолютно*; и, наконец, множество, где ряд *сходится условно*. При этом надо учесть, что некоторые из этих множеств могут быть *пустыми*.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n^2+1)\,x^n}\,.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1)\,x^n}{\sqrt[3]{n^2+1}\,(1+x^n)}\,.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{ne^{nx}}{\sqrt{n^3+3}}\,.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n \operatorname{arcctg} n}{1+x^{2n}}\,.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,\operatorname{arctg}^n x.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{\operatorname{ch}^n x}{2^{n\sqrt{n}}}\,.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}} \operatorname{sh}^n x$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{(3^n-2^n)x^{3n}}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n)^2 x^{\frac{n}{2}}}{3^{\sqrt{n}}}$.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n(2x-1)^n$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{x^{n^2}}$.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n(n+1)}$.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{(x+1)^{n^2}\ln(n+1)}$.

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{nx}$.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\sqrt{n}}}{2^n}$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{th}^n x}{3^{\sqrt{n}}}$.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \sin\frac{x}{\pi^n}$.

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^3}$.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\sqrt{n}}}{n-\ln n}$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\sqrt{n}}}{x^n-1}$.

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(\sqrt{n}-x)}{\sqrt{n}}\right]^n$.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^n$.

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x^2)\ln(n+x^4)}$. 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{nx^{3n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}}}{1-x^n}$. 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin nx}{(n+2)\ln(n+1)}$.

6. Равномерная сходимость

Прежде чем говорить об этом новом понятии (равномерная сходимость), уточним понятие сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ в каждой точке множества X.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в каждой точке множества X (или, как будем говорить, *поточечно* сходится), если для всякого $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X, \tag{6.1}$$

или, без знака предела,

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in X. \tag{6.2}$$

Нетрудно видеть, что номер N, который найдётся для любого $\varepsilon > 0$, и зависящий, естественно, от этого ε, зависит также и от точки x множества X.

Теперь введём понятие равномерной сходимости.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции

$f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } X. \tag{6.3}$$

или так:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{6.4}$$

Здесь мы видим, что номер N, по-прежнему зависящий от $\varepsilon > 0$, уже от $x \in X$ *не зависит*, и следовательно, годится для всех точек x множества X *сразу*. Поэтому если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, то она сходится и поточечно, причём *к той же самой* функции $f(x)$. Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Если понятие равномерной сходимости функциональной последовательности применить к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то есть

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

то получится понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функционального ряда (подобно (6.3) и (6.4)) обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } X. \tag{6.5}$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x). \tag{6.6}$$

Ясно, что если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то для любого подмножества $Y \subset X$ последовательность $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$, так как неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, верное для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$, очевидно, выполняется для тех же номеров n и для всех $x \in Y$. Это замечание, справедливое, разумеется, и для функциональных рядов, будет использоваться нами ниже.

Рассмотрим примеры, приведённые в конце предыдущего параграфа, с точки зрения понятия равномерной сходимости.

1. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N + 1 > N$ и $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0,1) \subset [0,1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает, что $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Опять возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N + 1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in (0,1] \subset [0,1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает,

что и здесь $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Для любого $\varepsilon > 0$ укажем номер $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть, в силу определения которой номер $N > \dfrac{1}{2\varepsilon} - 1$. Но тогда для всех номеров $n > N$, то есть для $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ и для любого $x \in X = [0,1]$ имеем, что $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{nx + \dfrac{1}{nx}} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ (вообще говоря, это неравенство установлено лишь для $x \in (0,1]$, но очевидно, что оно верно и для $x = 0$). Таким образом, для всех $n > N$ и для всех $x \in [0,1]$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. И здесь, подобно первым двум примерам, возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. Здесь возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{e} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N + 1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2} = \dfrac{n}{e} \geqslant \dfrac{1}{e} = \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Итак, в четырёх из пяти примеров мы видим, что последовательность $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. При этом согласно сделанному выше (на с. 75) замечанию, отсутствие равномерной сходимости к поточечному пределу означает отсутствие равномерной сходимости *вообще*, так как если бы оказалось, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} g(x) \not\equiv f(x)$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 6.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того, чтобы

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \tag{6.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы предел точной верхней грани

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{6.8}$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Необходимость. Пусть имеет место (6.7). Тогда, согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда из (6.9) вытекает, что для этих же номеров

$$0 \leqslant \alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть равенство (6.8) справедливо.

Достаточность. Пусть теперь имеет место (6.8), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда, согласно определению предела числовой последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $0 \leqslant \alpha_n < \varepsilon$. Поэтому для этих же номеров и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n < \varepsilon$, то есть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X равномерно сходится к функции $f(x)$. Теорема доказана.

Применим эту теорему к решению примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, и увидим, что с её помощью вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости у функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ решается гораздо быстрее. Для этого будем вычислять величину α_n (см. (6.9)).

1. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x \to 1-0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; но неравенства $\alpha_n \geqslant 1$ вполне достаточно), и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n \neq 0$, следовательно, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x \to 0+0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, соображения – те же, что и в предыдущем примере), и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n \neq 0$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Пусть $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$. Производная $\varphi_n'(x) = \dfrac{1 - n^2x^2}{\left(1 + n^2x^2\right)^2} = 0$ при $x = x_n = \dfrac{1}{n}$, нетрудно видеть (хотя бы по смене знака производной), что x_n – точка *максимума*, следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. Здесь $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ лишь множителем n отличается от функции $\varphi_n(x)$ предыдущего примера,

следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. В этом примере $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^2 x e^{-n^2x^2}$, с помощью дифференциального исчисления находим, что $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = \varphi_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \dfrac{n}{\sqrt{2e}}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty \neq 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Т е о р е м а 6.2 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть необходимость установлена.

Достаточность. Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.10}$$

Это, в частности, означает, что для любого *фиксированного* $x \in X$ *числовая* последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, и по критерию Коши сходимости числовых последовательностей для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Тогда для любого номера $n > N$ и для любого $x \in X$ переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (6.10), получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Теорема доказана.

Данная теорема легко перефразируется для функциональных рядов.

Теорема 6.3 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов). Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

В специальном доказательстве эта теорема (как и соответствующая теорема для числовых рядов) *не нуждается*, так как она только что была доказана для *любых* функциональных последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Теорема 6.4 (необходимый признак равномерной сходимости функциональных рядов). Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows \text{ на } X, \tag{6.11}$$

то его общий член

$$u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0. \tag{6.12}$$

Доказательство. Обозначим частичную сумму ряда (6.11) через $S_n(x)$, а всю сумму этого ряда – через $S(x)$. По условию $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, но тогда и $S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, а это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n-1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|u_n(x) - u(x)| = |u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + +|S(x) - S_{n-1}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть имеет место (6.12). Теорема доказана.

Теорема 6.5 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов). Если

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ для всех } x \in X, \tag{6.13}$$

а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для него справедлив критерий Коши сходимости числовых рядов, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \tag{6.14}$$

(знак абсолютной величины опущен, так как $c_n \geqslant 0$). Но тогда из (6.13) и (6.14) вытекает, что для тех же n и m и для всех $x \in X$ абсолютная величина

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon.$$

Следовательно, для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости (см. теорему 6.3), то есть этот ряд сходится равномерно на множестве X. Теорема доказана.

Признак Вейерштрасса достаточно прост в применении. Однако он даёт не только равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, то и его *абсолютную* сходимость в каждой точке множества X. Если же ряд сходится равномерно, но не абсолютно, то признак Вейерштрасса к таким рядам неприменúм. Для получения таких признаков, которые традиционно связываются с именами Дирихле и Абеля, напомним формулы преобразования Абеля (3.10) и (3.11), заменив фигурирующие там постоянные функциями, зависящими от переменной x.

Итак, пусть имеются две последовательности функций:

$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на некотором множестве X. Обозначим через $\{B_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$:

$$\begin{gathered} B_1(x) = b_1(x), \quad B_2(x) = b_1(x) + b_2(x), \dots, \\ B_k(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_k(x), \dots, \end{gathered} \tag{6.15}$$

а $D(x)$ – произвольная функция, определённая на множестве X. Тогда для любых номеров m и n, таких, что $m > n$, и для всех $x \in X$ справедливы формулы

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x) = a_m(x) B_m(x) - \\ - a_{n+1}(x) B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x). \end{gathered} \tag{6.16}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x) = a_m(x)\big(B_m(x) - D(x)\big) - \\ - a_{n+1}(x)\big(B_n(x) - D(x)\big) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\big(B_k(x) - D(x)\big). \end{gathered} \tag{6.17}$$

Теорема 6.6 (признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно на множестве X ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех $x \in X$ и для всех k абсолютная величина $\left| \sum\limits_{n=1}^{k} b_n(x) \right| \leqslant M$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{6.18}$$

равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ через $B_k(x)$ (см. (6.15)). По условию $|B_k(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$ и для всех k. Так как $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}\,, \quad n > N, \quad x \in X, \tag{6.19}$$

причём для всякого фиксированного $x \in X$, ввиду монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, справедливо либо неравенство

$$a_1(x) \geqslant a_2(x) \geqslant \dots \geqslant a_n(x) \geqslant a_{n+1}(x) \geqslant \dots \geqslant 0, \tag{6.20}$$

либо неравенство

$$a_1(x) \leqslant a_2(x) \leqslant \dots \leqslant a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x) \leqslant \dots \leqslant 0. \tag{6.21}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда для любого $x \in X$ из преобразования Абеля (6.16), неравенства (6.19) и одного из неравенств монотонности (неравенства (6.20) или неравенства (6.21)) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x)\Big| \leqslant |a_m(x)B_m(x)| + |a_{n+1}(x)B_n(x)| +$$
$$+\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1}\big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M +$$
$$+M\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1}\big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\Big| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+M\big|a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x) + \dots + a_{m-1}(x) - a_m(x)\big| =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M|a_{n+1}(x) - a_m(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда (6.18) выполняется критерий Коши равномерной сходимости, следовательно, по теореме 6.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Теорема доказана.

Как видим, доказательство признака Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов лишь с небольшими естественными изменениями повторяет доказательство признака Дирихле сходимости числовых рядов. Поэтому для *признака Абеля* ограничимся формулировкой.

Теорема 6.7 (признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём функциональная последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на множестве X ограничена в совокупности, то есть найдётся $K > 0$, что для всех $x \in X$ и для всех n абсолютная величина $|a_n(x)| \leqslant K$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X.

Отметим, что в признаках Дирихле и Абеля неважен *характер* монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (этот характер может быть *различным* в *разных* точках множества X).

Также следует иметь в виду, что признак Вейерштрасса (теорема 6.5), признак Дирихле (теорема 6.6), признак Абеля (теорема 6.7), в отличие от *критериев* (теоремы 6.1, 6.2 и 6.3), дают лишь *достаточные* условия равномерной сходимости, и если эти условия не выполняются, то ещё нельзя делать выводы об отсутствии равномерной сходимости. Аналогично можно сделать замечание относительно односторонности применения теоремы 6.4. Если будет установлено, что $u_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве X. Если же мы установим, что $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ остаётся открытым.

7. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые достаточные условия сохранения при предельном переходе тех или иных *функциональных* свойств (таких, как непрерывность, дифференцируемость и т. д.) у последовательностей и рядов функций, и мы увидим, что введённое в предыдущем параграфе понятие *равномерной* сходимости будет играть при этом решающую роль.

Теорема 7.1 (о предельном переходе в равномерно сходящихся функциональных последовательностях). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x), \tag{7.1}$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n, \tag{7.2}$$

где a – предельная точка множества X. Тогда существует (конечный) предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} A_n, \tag{7.3}$$

а также предел предельной функции

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{7.4}$$

Прежде чем приступать к доказательству, отметим два момента. Во-первых, a (предельная точка множества X) может быть одним из трёх бесконечных символов (∞, $+\infty$ или $-\infty$), а также символом, указывающим на *одностороннее* стремление x к a ($a+0$ или $a-0$). Во-вторых, стремление x к a в (7.2) и (7.4) осуществляется *по множеству* X, то есть точки в окрестности a берутся исключительно из точек множества X.

Доказательство. Пусть a – конечное число, и x стремится к a двусторонним образом. Согласно (7.1), по теореме 6.2, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{7.5}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получаем, согласно (7.2), что для тех же номеров n и m справедливо неравенство

$$|A_n - A_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{7.6}$$

то есть, в частности, числовая последовательность $\{A_n\}$ – *фундаментальна*, и стало быть, по критерию Коши сходимости числовых последовательностей, существует конечный предел (7.3). Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{7.7}$$

Переходя в неравенстве (7.5) (для любого фиксированного $x \in X$) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{7.8}$$

Если же перейти к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (7.6), то согласно (7.7) получим, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство

$$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{7.9}$$

Возьмём какой-нибудь номер $n > N$. Согласно (7.2), для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и таких, что

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{7.10}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{7.11}$$

Поэтому для всех $x \in X$, удовлетворяющих (7.10), из (7.8), (7.9) и (7.11) вытекает, что $|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, что и доказывает теорему в случае предельного перехода $x \to a$.

Если предельный переход $x \to a$ заменяется на один из пяти других возможных предельных переходов ($x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), то при доказательстве теоремы заменяется лишь неравенство (7.10) на соответствующее неравенство из приведённой здесь таблицы (в неё для общности и полноты картины включено и неравенство (7.10) для случая двустороннего стремления переменной $x \in X$ к конечному числу a):

предельный переход	неравенство (7.10)
$x \to a$	$0 < \lvert x - a\rvert < \delta$
$x \to a + 0$	$0 < x - a < \delta$
$x \to a - 0$	$0 < a - x < \delta$
$x \to \infty$	$\lvert x\rvert > \delta$
$x \to +\infty$	$x > \delta$
$x \to -\infty$	$x < -\delta$

Проводя доказательство слово в слово и заменяя неравенство (7.10) одним из приведённых выше, получаем, что для всех возможных предельных переходов утверждение теоремы также справедливо. Теорема доказана.

Итак, мы видим, что при выполнении условий теоремы 7.1 имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_n(x)\big), \tag{7.12}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и переход к пределу по n.

Применим теперь теорему 7.1 к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и тем самым убедимся, что справедлива

Теорема 7.2 (о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся функциональных рядах). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = a_n,$$

где a – предельная точка множества X. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, причём предел суммы ряда

$$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Так как теорема 7.2 – только перефразировка предшествующей теоремы 7.1, то в специальном *доказательстве* она *не нуждается*.

Последнему соотношению теоремы 7.2 можно придать вид, подобный (7.12): при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\lim_{x \to a} u_n(x) \big), \tag{7.13}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Сделаем небольшое отступление. Пусть имеется функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая определена на множестве X и такова, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} \varphi_n(x) = 1$, где a – предельная точка множества X. Пусть нам дана числовая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$. Введём в рассмотрение функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с n-м элементом $f_n(x) = A_n\varphi_n(x)$ (функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с общим членом $u_n(x) = a_n\varphi_n(x)$) и пусть существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\Big($функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, то есть существует сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)$ в каждой точке $x \in X$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (предел $\lim\limits_{x\to a} S(x)$), если он либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, можно поставить в соответствие числовой последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$ в качестве обобщённого значения предела (обобщённого значения суммы). Линейность этого метода очевидна, а условиями его регулярности и полной регулярности мы заниматься не будем.

Применяя теоремы 7.1 и 7.2 к функциональной последовательности или к функциональному ряду, которые состоят из непрерывных в некоторой точке функций, можно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Т е о р е м а 7.3 (о непрерывности в точке предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a,b]$. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Т е о р е м а 7.4 (о непрерывности в точке суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функ-

циональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$
причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Из этих теорем сразу вытекают ещё две теоремы.

Теорема 7.5 (о непрерывности на отрезке предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Пусть функциональная последовательность
$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$
причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда предельная функция $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Теорема 7.6 (о непрерывности на отрезке суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Пусть функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$
причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Отметим, что теоремы 7.5 и 7.6 иногда можно использовать для доказательства отсутствия равномерной сходимости функциональной последовательности или функционального ряда. Действительно, если для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ (функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$) и
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \Bigl(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Bigr), \quad x \in [a, b],$$

причём $f(x) \notin \mathbb{C}[a,b]$ $(S(x) \notin \mathbb{C}[a,b])$, то

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} f(x) \quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} S(x)\Big).$$

Отсюда, в частности, сразу вытекает, что в первых двух из пяти примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, *нет* равномерной сходимости, так как предельная функция в этих примерах разрывна. Таким образом, требование равномерной сходимости в теоремах 7.5 и 7.6 *существенно*. Однако *необходимым* оно не является, как показывают два последних примера из этих же пяти, в которых последовательность непрерывных функций поточечно, но неравномерно сходится к непрерывной функции. Тем не менее в некоторых случаях требование равномерной сходимости будет и *необходимым*.

Теорема 7.7 (теорема Ди́ни для функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;

б) для всех $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

в) предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в условии б) для всякого $x \in [a,b]$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *не убывает* (в противном случае вместо функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будем рассматривать последовательность $\{-f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$). Обозначим $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ясно, что $\varphi_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и для любого $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – *неотрицательна* и монотонно не возрастая стремится к нулю, то есть

$$\begin{gathered}\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \cdots \geqslant 0, \\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \quad x \in [a,b].\end{gathered} \tag{7.14}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы один номер n, что для всех $x \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant \varphi_n(x) < \varepsilon. \tag{7.15}$$

(Согласно (7.14), для всех бóльших n неравенство (7.15) также выполняется.) Докажем это от противного. Пусть найдётся $\varepsilon > 0$, что для любого номера n можно указать значение $x_n \in [a,b]$, что

$$\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{7.16}$$

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ограничена*, следовательно по теореме Больцано–Вейерштрасса, существует *сходящаяся* подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ этой последовательности:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]. \tag{7.17}$$

Но для всякого m найдётся номер k, что $n_k \geqslant m$. Поэтому из (7.14) и (7.16) следует, что $\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$. Это означает, что

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon. \tag{7.18}$$

Функция $\varphi_m(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$, следовательно из (7.17) и (7.18) вытекает, что $\varphi_m(x_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$, то есть

$$\varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

А это противоречит тому, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_n(x_0) = 0$ (см. (7.14)). Теорема доказана.

Ясно, что аналог этой теоремы для функциональных рядов имеет нижеследующий вид.

Теорема 7.8 (теорема Дини для функциональных рядов). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ таков, что

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;
б) для всех $x \in [a,b]$ и для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ значения $u_n(x) \geqslant 0$ (значения $u_n(x) \leqslant 0$);
в) сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$.

Теорема 7.9 (об интегрировании предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x), \tag{7.19}$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx. \tag{7.20}$$

Доказательство. Отметим, что из (7.19) по теореме 7.5 вытекает, что $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, а непрерывные функции интегрируемы. Не ограничивая общности, будем считать, что $a < b$, так как при $a = b$ равенство (7.20) очевидно (оно переходит в равенство $0 = 0$), а при $a > b$ предварительно переставим пределы интегрирования в обеих частях равенства (7.20).

Из (7.19) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Но тогда для этих же номеров n имеем, что $\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = = \left|\int\limits_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. А это означает, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходится к числу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, следовательно, равенство (7.20) справедливо. Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что при выполнении условий теоремы 7.9 имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\bigr)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx, \qquad (7.21)$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и переход к пределу по n.

Запишем аналог этой теоремы для функциональных рядов.

Теорема 7.10 (об интегрировании суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

И здесь мы видим, что при выполнении условий теоремы 7.10 имеет место равенство

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx, \tag{7.22}$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 7.9 и 7.10 справедливы и при более слабых предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$: непрерывность можно заменить интегрируемостью. Однако мы не будем доказывать эти теоремы при таких условиях.

Отметим, что требование равномерной сходимости в теоремах 7.9 и 7.10, являясь существенным, не является в то же время необходимым: если его отбросить, то утверждения этих теорем могут как остаться верными, так и стать несправедливыми. Рассмотрим с этой точки зрения два последних примера, приведённых в конце первого параграфа. В обоих примерах $X = [0, 1]$, $f(x) \equiv 0$, а *равномерная сходимость*, как уже было выяснено, *отсутствует*.

4. Здесь $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\,dx}{1 + n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\ \ln\big(1+n^2x^2\big)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\big(1 + n^2\big)}{2n} =$$

$= 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то есть равенство (7.20) выполняется.

(В том, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\bigl(1+n^2\bigr)}{2n} = 0$, легко убедиться, вычислив предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln\bigl(1+t^2\bigr)}{2t}$, например, по правилу Лопиталя.)

5. В этом примере $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n^2xe^{-n^2x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{e^{-n^2x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$ $= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\bigl(1-e^{-n^2}\bigr) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, здесь равенство (7.20) не выполняется.

Т е о р е м а 7.11 (о дифференцировании предельной функции функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{7.23}$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $f_n'(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, и последовательность

$$f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x). \tag{7.24}$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема, причём

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b]. \tag{7.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 7.5 вытекает, что функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Возьмём любое число $x \in [a,b]$. В силу замечания на с. 76, из (7.24) следует, что

$$f_n'(t) \overset{[a,x]}{\rightrightarrows} \varphi(t).$$

Теперь мы видим, что для функциональной последовательности $\{f_n'(t)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены все условия теоремы 7.9, и поэтому из (7.20) и (7.23) вытекает $\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n'(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a)$, то есть

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{7.26}$$

Так как функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, то по теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом из (7.26) вытекает (7.25). Теорема доказана.

Итак, при выполнении условий теоремы 7.11 имеет место равенство

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b]. \tag{7.27}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и переход к пределу по n.

Перефразируем эту теорему для функциональных рядов.

Т е о р е м а 7.12 (о дифференцировании суммы функционального ряда). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in [a,b],$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $u_n'(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x).$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a,b]$ функция $S(x)$ дифференцируема, причём

$$S'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

И здесь, подобно (7.27), при выполнении условий теоремы 7.12 справедливо равенство

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a,b]. \tag{7.28}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 7.11 и 7.12 справедливы и при менее жёстких предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$. Однако мы не будем уточнять условия этих теорем.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим п р и м е р.

Введём функцию

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,. \tag{7.29}$$

Эта функция называется “дзета-функцией Римана”. Так как ряд в (7.29), как хорошо известно, сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$, то отсюда следует, что функция $\zeta(x)$ определена при $x \in (1, +\infty)$.

Установим, что ряд в (7.29) не является равномерно сходящимся на множестве $X = (1, +\infty)$. Действительно, если бы он равномерно сходился на X, то по теореме 7.2, переходя к пределу при $x \to 1+0$, мы получили бы, что расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ оказался бы сходящимся.

Исследуем функцию $\zeta(x)$ на непрерывность в своей области определения, используя при этом наличие равномерной сходимости ряда в (7.29) (разумеется, не на всём множестве X, а на какой-то его части). Возьмём произвольное число $x_0 \in (1, +\infty)$ и укажем два числа x_1 и x_2, такие, что $x_1 \in (1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$ (например, можно взять $x_1 = \frac{1+x_0}{2}$, $x_2 = x_0 + 1$). Очевидно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_1}},$$

а так как *числовой* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_1}}$ *сходится* ($x_1 > 1$), то по признаку Вейерштрасса (теорема 6.5) *функциональный* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, определяющий функцию $\zeta(x)$, *сходится равномерно* на множестве $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 7.6, функция $\zeta(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, то есть непрерывна в *каждой* точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. Точка x_0 – *любая* точка множества X, следовательно, функция $\zeta(x)$ непрерывна в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Исследуем теперь функцию $\zeta(x)$ на дифференцируемость в своей области определения, точнее, убедимся, что справедлива формула

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty). \tag{7.30}$$

Ряд в (7.30) получен формальным дифференцированием ряда в (7.29). Проверим выполнение условий теоремы 7.12. В проверке нуждается лишь выполнение условия о равномерной сходимости формально продифференцированного ряда, то есть ряда в (7.30), ибо остальные условия (сходимость исходного ряда и непрерывность производных), очевидно, выполняются. Применим тот же приём, что и при исследовании функции $\zeta(x)$ на непрерывность, то есть для произвольного числа $x_0 \in (1, +\infty)$ укажем числа $x_1 \in (1, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, +\infty)$. Ясно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^{x_1}},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_1}} \tag{7.31}$$

сходится. Установим это. Так как $x_1 > 1$, а предел отношения $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\frac{x_1-1}{2}}} = 0$ (в этом можно убедиться по правилу Лопиталя), то для достаточно больших t числитель этой дроби $\ln t < t^{\frac{x_1-1}{2}}$. Поэтому для достаточно больших n общий член $\dfrac{\ln n}{n^{x_1}} < \dfrac{n^{\frac{x_1-1}{2}}}{n^{x_1}} = \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$ сходится (поскольку $x_1 > 1$, то $\dfrac{x_1+1}{2} > 1$), следовательно, и ряд (7.31) сходится. Итак, по признаку Вейерштрасса (теорема 6.5) ряд в (7.30) сходится равномерно на $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 7.12, равенство (7.30) выполняется в каждой точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. А точка x_0 – *произвольная* точка множества X, следовательно, равенство (7.30) выполняется в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Аналогичные рассмотрения (с многократным применение теоремы 7.12 на отрезке $[x_1, x_2] \subset (1, +\infty)$) дают возможность установить, что функция $\zeta(x)$ *бесконечно дифференцируема* в своей области определения, причём

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in (1, +\infty).$$

Варианты домашних заданий

Исследовать на равномерную сходимость на указанных множествах функциональную последовательность и функциональный ряд.

1. (a) $f_n(x) = n\left[\operatorname{ctg}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \operatorname{ctg} x\right], \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n\sqrt{n}}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$

2. (a) $f_n(x) = n\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{n}\right)\right], \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^3 + n^2}, \qquad x \in (0, +\infty).$

3. (a) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x\right], \qquad x \in (1, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x}{x^2 + n\sqrt{n}}\,,$ $\quad x \in (0, +\infty).$

4. (a) $f_n(x) = n\left[\operatorname{arctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg} x\right],$ $\quad x \in (0, +\infty);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + n}\,,$ $\quad x \in [0, 1).$

5. (a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + x}\,,$ $\quad x \in [1, +\infty);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 + n^2}\,,$ $\quad x \in [0, +\infty).$

6. (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2\, x^2}{1 + n^2\, x}\,,$ $\quad x \in [0, +\infty);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{x^n + n}\,,$ $\quad x \in [0, 1].$

7. (a) $f_n(x) = n\left[\operatorname{arcctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{arcctg} x\right],$ $\quad x \in (0, +\infty);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-nx},$ $\quad x \in (0, +\infty).$

8. (a) $f_n(x) = n\left[\arcsin x - \arcsin\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right],$ $\quad x \in (0, 1);$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^2}{x^3 + n^2}\,,$ $\quad x \in [0, +\infty).$

9. (a) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{(-1)^n}{n}}\,,$ $\quad x \in [1, +\infty);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{x}\, e^{-nx}$, $x \in (0, +\infty)$.

10. (a) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x + \dfrac{1}{n^2}\right) - \ln x\right]$, $x \in (0, 1)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3\, e^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

11. (a) $f_n(x) = \left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n$, $x \in (-1, 1)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\, e^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

12. (a) $f_n(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{1}{n}\right)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt[n]{2^n + x^n}}$, $x \in (-1, 1)$.

13. (a) $f_n(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, x^2\, e^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

14. (a) $f_n(x) = \sin\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, x^n}{\sqrt[n]{3^n + x^n}}$, $x \in (-1, 1)$.

15. (a) $f_n(x) = \cos\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\,,$ $\qquad x \in [-\pi, \pi].$

16. (a) $f_n(x) = e^{-(x+n)^2},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2+n^3}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

17. (a) $f_n(x) = n\left[\ln^2\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \ln^2 x\right],$ $\qquad x \in [1, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+(-1)^n}\,,$ $\qquad x \in (-1, 0).$

18. (a) $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2+n^3}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

19. (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{nx},$ $\qquad x \in (0, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x\, e^{-nx^2},$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

20. (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n+x},$ $\qquad x \in (0, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x \left(1-x^2\right)^n,$ $\qquad x \in [0, 1].$

21. (a) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{\ln x} - 1\right),$ $\qquad x \in (2, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(x^n+1),$ $\qquad x \in (-1, 1).$

22. (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + \dfrac{1}{n}}\,,$ $\qquad x \in [0, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[x + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\qquad x \in (-1, 1).$

23. (a) $f_n(x) = n\left[\sqrt{x + \dfrac{(-1)^n}{n}} - \sqrt{x}\right],$ $\qquad x \in (1, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{x}{n}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

24. (a) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{nx+1} + \cos nx}{\sqrt{n}},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[x + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\qquad x \in (-1, 1).$

25. (a) $f_n(x) = \cos\dfrac{nx+1}{n^2}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-|x-n|},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

26. (a) $f_n(x) = \sin\dfrac{nx^2+1}{n^2}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{x^n + \frac{1}{n}}\right),$ $\qquad x \in (0, 1).$

27. (a) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{x}\right),$ $\qquad x \in [0, +\infty);$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(x-n)^2},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

28. (a) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x+\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln x\right]$, $\quad x \in (1, +\infty)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{n}\right)\right]$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

29. (a) $f_n(x) = n(\operatorname{th} nx - 1)$, $\quad x \in (0, +\infty)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{n^2}}{n}$, $\quad x \in (-1, 1)$.

30. (a) $f_n(x) = n\left[e^{x+\frac{(-1)^n}{n}} - e^x\right]$, $\quad x \in (-1, 1)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x}{(1+x^2)^n}$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$.

8. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \\ + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{8.1}$$

называется *степенным* рядом.

Если в ряде (8.1) обозначить $x - x_0 = t$, то он перейдёт в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, будем называть степенным рядом функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{8.2}$$

получающийся из ряда (8.1) при $x_0 = 0$.

Любой степенной ряд (8.2) сходится (и при том абсолютно) при $x = 0$. Имеются степенные ряды, сходящиеся *только* при $x = 0$. Рассмотрим два примера.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Применяя при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n^n x^n$ радикальный признак Коши в предельной форме (следствие из теоремы 2.5), находим: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x| = +\infty$. В этом случае, как известно (см. замечание на с. 27), общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю, и исходный ряд расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. В этом случае применим при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n!\, x^n$ признак Даламбера в предельной форме (следствие из теоремы 2.4). Тогда предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|(n+1)!\, x^{n+1}|}{|n!\, x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty$, то есть и здесь общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю и исходный ряд расходится.

Теорема 8.1 (первая теорема Абеля). Если ряд (8.2) сходится при $x = \tilde{x} \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех x таких, что $|x| < |\tilde{x}|$.

Доказательство. По условию, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сходится, следовательно, по необходимому признаку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0$.

Так как сходящаяся последовательность ограничена, то найдётся $M > 0$, что для всех номеров n абсолютная величина $|a_n \tilde{x}^n| \leqslant M$. Поскольку для общего члена ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{8.3}$$

имеет место оценка $|a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leqslant M \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right|^n$, а геометрическая прогрессия $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n$ – сходится (её знаменатель $q = \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right| < 1$), то по признаку сравнения для числовых рядов ряд (8.3) сходится, то есть ряд (8.2) сходится абсолютно. Теорема доказана.

Выясним, как устроено множество сходимости X степенного ряда (8.2). Оно всегда непусто ($X \neq \emptyset$), так как у любого ряда $0 \in X$. Как показывают рассмотренные выше примеры, бывают ряды, у которых $X = \{0\}$. Такие ряды называются *всюду расходящимися* степенными рядами. Если ряд (8.2) не является всюду расходящимся степенным рядом, то имеются точки $\tilde{x} \neq 0$, в которых он сходится. Рассмотрим множество $\{|\tilde{x}|\}$.

Если это множество не ограничено сверху, то по первой теореме Абеля ряд (8.2) сходится, причём абсолютно, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Такие степенные ряды называются *всюду сходящимися*.

Пусть теперь множество $\{|\tilde{x}|\}$ ограничено сверху. Обозначим $R = \sup\{|\tilde{x}|\}$ $(0 < R < +\infty)$. Из определения точной верхней грани и теоремы 8.1 следует, что для всех x таких, что $|x| > R$, ряд (8.2) расходится, а если $x \in (-R, R)$, то ряд (8.2) абсолютно сходится. В пограничных точках (при $x = \pm R$) первая теорема Абеля ответа не даёт. Как мы увидим ниже, в этих точках общего вывода о сходимости (расходимости) сделать нельзя: есть примеры рядов, сходящихся при $x = \pm R$, есть примеры рядов, расходящихся при $x = \pm R$, а есть примеры рядов, которые сходятся на одном конце интервала $(-R, R)$ и расходятся на другом; если есть сходимость на каком-то из концов, то она может в одних примерах быть абсолютной, а в других – условной.

Отсюда можно сделать очень важный

Вывод. Всякий степенной ряд (8.2) характеризуется величиной R, называемой *радиусом сходимости* (R – либо неотрицательное число, либо символ $+\infty$). Если $R = 0$, то ряд (8.2) сходится (причём абсолютно) только при $x = 0$. Если $R \neq 0$, то для всех $x \in (-R, R)$ (этот интервал называется *интервалом сходимости*) степенной ряд абсолютно сходится, а если $R \in (0, +\infty)$, то при $|x| > R$ степенной ряд расходится, в граничных точках интервала сходимости может быть либо расходимость, либо абсолютная сходимость, либо условная сходимость.

Отметим попутно, что для степенных рядов (8.1) интервалом сходимости будет множество $(x_0 - R, x_0 + R)$, а всюду расходящийся степенной ряд (8.1) сходится лишь при $x = x_0$.

Теорема 8.2 (теорема Коши–Адамара). Радиус сходимости R степенного ряда (8.2) можно найти по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{8.4}$$

(если неотрицательный верхний предел, стоящий в знаменателе, равен нулю, то $R = +\infty$, а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то $R = 0$).

Доказательство. Обозначим

$$\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n. \tag{8.5}$$

Пусть $\rho = 0$. Так как верхний предел последовательности – её крайняя правая предельная точка, а отрицательных частичных пределов у последовательности $\{\rho_n\}$ быть не может ($\rho_n \geqslant 0$), то эта предельная точка – единственная. Это означает, что последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к пределу $\rho = 0$, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Но тогда для всякого $x \in (-\infty, +\infty)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n |x| = 0 < 1$, следовательно, согласно радикальному признаку Коши в предельной форме (следствие из теоремы 2.5), ряд (8.2) абсолютно сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому здесь радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть $\rho = +\infty$. Возьмём произвольное значение $x \neq 0$. Так как верхний предел последовательности – её (крайний правый) частичный предел, то существует строго монотонная последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = +\infty$. Это значит, что найдётся такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ имеет место неравенство $\rho_{n_k} > \dfrac{1}{|x|}$. Отсюда согласно (8.5) имеем, что $\rho_{n_k} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x|}$, то есть $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$. Последнее неравенство означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$, другими словами, для всякого $x \neq 0$ степенной ряд (8.2) расходится, следовательно, его радиус сходимости $R = 0$.

Пусть $0 < \rho < +\infty$. Применим радикальный признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин слагаемых ряда (8.2). Используя (8.5) находим, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \rho_n |x| = \rho|x|$. Согласно радикальному признаку Коши в предельной форме, если $\rho\,|x| < 1$, то есть при $|x| < \dfrac{1}{\rho}$, ряд (8.2) сходится абсолютно, а если $\rho|x| > 1$, то есть при $|x| > \dfrac{1}{\rho}$, ряд (8.2) расходится по необходимому признаку. Поэтому здесь $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Итак, во всех случаях формула (8.4) справедлива. Теорема доказана.

Разумеется, пользоваться формулой Коши–Адамара не всегда удобно. Однако если нужно найти множество сходимости степенного ряда, то его можно рассматривать как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, в котором $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, и искать множество сходимости такого функционального ряда.

Проиллюстрируем сказанное п р и м е р а м и.

1. Рассмотрим ряд
$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{8.6}$$
Здесь $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Пользоваться формулой Коши–Адамара неудобно, так как неясно поведение радикала $\sqrt[n]{n!}$. Применим к этому ряду (при $x \neq 0$) признак Даламбера в предельной форме:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$
Это означает, что исследуемый ряд сходится абсолютно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то есть его радиус сходимости $R = +\infty$.

2. Рассмотрим ряд
$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \tag{8.7}$$

Здесь $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. По формуле Коши–Адамара имеем $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится. При $x = 1$ ряд (8.7) переходит в условно сходящийся ряд Лейбница, а при $x = -1$ – в ряд, лишь множителем (-1) отличающийся от гармонического ряда, и поэтому расходящийся.

3. Рассмотрим ряд

$$
\begin{aligned}
&1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \\
&+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n + \cdots = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n,
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

называемый *биномиальным* рядом. Этот ряд является степенным рядом с параметром α. Здесь

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &\equiv 1, & a_0 &= 1,\\
u_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n, & &(n = 1, 2, 3, \ldots),\\
a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}, & &(n = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда все члены ряда (8.8), начиная с некоторого номера (с номера $n = \alpha + 1$), становятся равными нулю. У такого ряда, вырождающегося в конечную сумму, радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Тогда ни один из коэффициентов ряда (8.8) не будет нулём. Для нахождения множества сходимости этого ряда, так же как в первом примере, воспользуемся (при $x \neq 0$) признаком Даламбера. Так как $u_{n+1}(x) = $ $= \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}\,x^{n+1} = u_n(x)\,\dfrac{\alpha-n}{n+1}\,x$, то

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right|. \tag{8.10}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right| = |x|.$$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится, то есть для всякого $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ у биномиального ряда (8.8) радиус сходимости $R = 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости (при $x = \pm 1$).

Пусть $\alpha \leqslant -1$. Из (8.10) находим

$$\frac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geqslant 1,$$

и поэтому, согласно признаку Даламбера в допредельной форме (теорема 2.4) при $\alpha \leqslant -1$ ряд (8.8) расходится на обоих концах интервала сходимости.

При остальных нерассмотренных α, то есть при нецелых $\alpha > -1$, признак Даламбера ни в предельной, ни в допредельной формах не работает. Воспользуемся признаком Раабе в предельной форме (следствие из теоремы 2.7). Так как $n \to \infty$, то будем рассматривать $n > \alpha$. Согласно (8.10) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha + 1. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, то есть α – любое положительное ненатуральное число. Тогда $\alpha + 1 > 1$, и поэтому из (8.11) вытекает, что при этих α ряд (8.8) абсолютно сходится на обоих концах интервала сходимости.

Пусть $\alpha \in (-1, 0)$. В этом случае $\alpha + 1 < 1$, и поэтому из (8.11) вытекает, что при этих α у ряда (8.8) нет абсолютной сходимости ни на одном из концов интервала сходимости. Если обозначить

$$c_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8.12}$$

то отсюда согласно (8.8) и (8.9) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{8.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n. \tag{8.14}$$

Из (8.12) следует, что ряд (8.13) – *знакоположительный*, и так как у него нет абсолютной сходимости, то он *расходится*; а ряд (8.14) – *знакочередующийся*. Поскольку

$$c_{n+1} = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)(n-\alpha)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} = c_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < c_n,$$

то положительная числовая последовательность $\{c_n\}$ является строго *убывающей*, поэтому для доказательства сходимости (естественно, *условной*) по признаку Лейбница ряда (8.14) достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{8.15}$$

Согласно обозначению (8.12), имеем

$$-\ln c_n = -\ln(-\alpha) - \ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \dots - \ln\left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right),$$

то есть последовательность $\{-\ln c_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, общий член которого $b_n = -\ln\Bigl(1 - \dfrac{1+\alpha}{n}\Bigr) \sim \dfrac{1+\alpha}{n}$. Но ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\alpha}{n}$ расходится, так как лишь множителем $(1+\alpha)$ отличается от расходящегося гармонического ряда. Поэтому, по признаку сравнения в предельной форме, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\ln c_n) = +\infty$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln c_n = -\infty$, следовательно, (8.15) имеет место, чем, как уже отмечалось, доказана условная сходимость ряда (8.14).

Итак, для биномиального ряда (8.8) получаем:

- если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $R = +\infty$ (при этих α ряд имеет конечное число ненулевых членов);

- если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, то $R = 1$, причём:

– при $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ряд сходится для всех $x \in [-1, 1]$ и сходимость ряда – абсолютная на обоих концах;
– при $\alpha \in (-1, 0)$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1]$, в точке $x = -1$ ряд расходится, в точке $x = 1$ ряд сходится условно;
– при $\alpha \in (-\infty, -1]$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1)$, в обеих граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится.

Теорема 8.3 (равномерная сходимость степенного ряда). Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда для всякого $r \in (0, R)$ этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, R) \subset (-R, R)$, а на интервале $(-R, R)$ ряд (8.2) сходится абсолютно. Это означает, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty. \tag{8.16}$$

Далее, для любого $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n. \tag{8.17}$$

Из (8.16) и (8.17) по признаку Вейерштрасса (теорема 6.5) получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ на $[-r, r]$. Теорема доказана.

Теорема 8.4 (непрерывность суммы степенного ряда). Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда сумма $S(x)$ этого ряда непрерывна на $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольное число из интервала $(-R, R)$. Возьмём какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$. Тогда по теореме 8.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и следовательно, согласно теореме 7.6, его сумма $S(x) \in \mathbb{C}[-r, r]$, то есть $S(x)$ непрерывна в *любой* точке $[-r, r]$, в том числе и в точке x_0. Итак, для всякого $x_0 \in (-R, R)$ функция $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Теорема доказана.

Теорема 8.5 (единственность коэффициентов степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_a(x) \tag{8.18}$$

имеет радиус сходимости $R_1 > 0$, а степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_b(x) \tag{8.19}$$

имеет радиус сходимости $R_2 > 0$. Пусть найдётся $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности нуля одного из видов:

$$\begin{array}{llll} (1) & (-\delta, \delta), & (2) & (-\delta, 0) \cup (0, \delta), \\ (3) & [0, \delta), & (4) & (0, \delta), \\ (5) & (-\delta, 0], & (6) & (-\delta, 0), \end{array} \tag{8.20}$$

справедливо равенство

$$S_a(x) = S_b(x). \tag{8.21}$$

Тогда

$$a_n = b_n \tag{8.22}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Если равенство (8.21), или, в развёрнутом виде,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots , \tag{8.23}$$

имеет место для всех x из δ-окрестности нуля вида (8.20) (1), (8.20) (3) или (8.20) (5) (то есть из окрестности, содержащей точку 0), то подставив в это равенство значение $x = 0$, получим

$$a_0 = b_0. \tag{8.24}$$

Если же (8.23) имеет место для всех значений x из окрестности вида (8.20) (2), (8.20) (4) или (8.20) (6) (то есть из окрестности, не содержащей точку 0), то устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (8.20) (2), $x \to 0+0$ в окрестности вида (8.20) (4), $x \to 0 - 0$ в окрестности вида (8.20) (6)) в этом равенстве, также получим (8.24). Взаимно уничтожая a_0 и b_0 в обеих частях (8.23) и сокращая их на x (естественно, при $x \neq 0$), получаем

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots . \tag{8.25}$$

Устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (8.20) (1) или (2), $x \to 0 + 0$ в окрестности вида (8.20) (3) или (4), $x \to 0 - 0$ в окрестности вида (8.20) (5) или (6)), убеждаемся, что

$$a_1 = b_1.$$

Взаимно уничтожая a_1 и b_1 в обеих частях (8.25), сокращая их на x и устремляя x к нулю в получаемом равенстве с соответствующей стороны, видим, что

$$a_2 = b_2.$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что (8.22) справедливо для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Теорема 8.6. Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд расходится при $x = R$

(при $x = -R$). Тогда этот ряд не является равномерно сходящимся на $[0, R)$ (на $(-R, 0]$).

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \text{ на } [0, R).$$

Осуществляя в этом ряде почленный переход к пределу при $x \to R-0$, получаем, согласно теореме 7.2, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится, что противоречит условию расходимости степенного ряда (8.2) при $x = R$ и тем самым устанавливает справедливость доказываемой теоремы для *правой* половины интервала сходимости. Рассмотрение *левой* половины интервала сходимости проводится аналогично. Теорема доказана.

Теорема 8.7. Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд равномерно сходится на $[0, R]$ (на $[-R, 0]$).

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (8.2). Представим (при $x \in [0, R]$) этот ряд в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n. \tag{8.26}$$

По условию *числовой* ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (возможно, не абсолютно, а лишь условно), следовательно рассматриваемый как ряд *функциональный* (состоящий из функций-констант), он сходится *равномерно* на любом множестве (в том числе на множестве $[0, R]$). На этом же множестве

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ и при любом $x \in [0, R]$ числовая последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает:

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \cdots .$$

Поэтому согласно признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (теорема 6.7), ряд (8.26), то есть степенной ряд (8.2), сходится равномерно на $[0, R]$. Теорема доказана.

Теорема 8.8 (вторая теорема Абеля). Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда существует $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ $\Big($существует $\lim\limits_{x \to -R+0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\Big)$.

Доказательство. Также как при доказательстве теоремы 8.6 и теоремы 8.7, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (8.2). Согласно предыдущей теореме, ряд (8.2) сходится равномерно на $[0, R]$. Но тогда по теореме 7.2 в этом ряде можно переходить к пределу при $x \to R-0$, а $\lim\limits_{x \to R-0} a_n x^n = a_n R^n$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.9 (о почленном интегрировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x). \tag{8.27}$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ интеграл

$$\begin{gathered}\int\limits_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \\ = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1} x^m}{m}\,.\end{gathered} \tag{8.28}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$, и исходный ряд (8.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (8.28) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд (8.28) как степенной ряд, расположенный по степеням x^m. Его радиус сходимости R_1 найдём по формуле Коши–Адамара (8.4) (см. теорему 8.2):

$$\begin{gathered}\frac{1}{R_1} = \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{a_{m-1}}{m}\right|} = \varlimsup_{m\to\infty} \left(\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \\ = \left(\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{R}\,.\end{gathered}$$

При выводе этой формулы также было использовано, что пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m-1}{m} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1$, а верхний предел $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|} = \varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \dfrac{1}{R}$. Итак, $R_1 = R$. Возьмём произвольно $x_0 \in (-R, R)$ и какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$.

Тогда по теореме 8.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и следовательно, согласно теореме 7.10, его можно почленно интегрировать, то есть равенство (8.28) справедливо для всех $x \in (-R, R)$. Если же $R \in (0, +\infty)$ и ряд (8.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то возможность почленного интегрирования вытекает из теоремы 8.7 (равномерная сходимость) и теоремы 7.10. Теорема доказана.

Теорема 8.10 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (8.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x).$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ существует производная

$$\begin{gathered} S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \\ = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m. \end{gathered} \tag{8.29}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$, и ряд (8.29) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (8.29) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы (надо лишь вместо теоремы 7.10 о почленном интегрировании функциональных рядов использовать теорему 7.12 о почленном дифференцировании таких рядов) и поэтому *не приводится*.

Варианты домашних заданий

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать поведение степенного ряда на концах интервала сходимости.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^{3n+1}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{4n^2-1}(x-2)^{3n-1}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(x+1)^{2n-1}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(x-1)^{3n}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n)!!}\right]^2(x+2)^{2n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{\sqrt{n}}(x-3)^{3n}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-2)^{2n}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n(2n)!!}{(2n+1)!!}}(x+3)^{2n}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n^2}-\frac{2^n}{n}\right)(x-1)^{3n}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n^2+1}}{3^n\ln(n+1)}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}}(x+1)^{2n}.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^{3n-2}}{n^{\ln n}}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-1)^{3n+1}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{2^{n+1}e^{\sqrt{n}}}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}(x-3)^{2n-1}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n}-\frac{2^n}{n^2}\right)(x+1)^{5n-2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{2^n n\sqrt{n}}(x+2)^{5n-1}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n+1}}{2^n \sqrt{2n+1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{3^n(2n-1)}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n^n-1}}{e^n\, n \ln(n+2)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{3n-1}}{3^n\, n \ln^3(n+1)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{4n+1}\right)^n (x-1)^{4n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n-1}}{2^n \ln^2 \sin \frac{1}{n}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{3^n(2n)!!}\right]^3 (x+3)^{3n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2} (x+1)^{5n+2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{e^n} \cdot (x+1)^{5n-1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{2}{n}\right)^{n^3} (x-2)^{3n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-\ln n}(x+1)^{4n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n \ln(n+1)} (x-3)^{3n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n!}}{n^n + \ln n}$.

9. Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд вида (8.2), радиус сходимости которого $R > 0$ (то есть функция $f(x)$ является суммой этого ряда по крайней мере на интервале $(-R, R)$). Согласно теореме 8.10, у функции $f(x)$ при $x \in (-R, R)$ существует производная $f'(x)$, которую можно получить с помощью почленного дифференцирования степенного ряда. Так как радиус сходимости продифференцированного ряда тот же самый, то операцию дифференцирования можно проделать сколько угодно раз:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \cdots, \\
f'(x) &= 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \\
f''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + \cdots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Подставляя сюда $x = 0$, имеем, что

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9.1}$$

и, следовательно, разложение в ряд функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{9.2}$$

Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$. Точнее, ряд в (9.2) называется *рядом Маклорена*, а рядом Тейлора называется ряд вида (8.1) с центром в точке x_0, представляющий функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{9.3}$$

Ясно, что при $x_0 = 0$ формула (9.3) переходит в формулу (9.2), поэтому в дальнейшем будем иметь дело с разложением (9.2).

Согласно теореме единственности коэффициентов степенных рядов (теорема 8.5), если какая-то функция $f(x)$

является суммой степенного ряда (8.2) с радиусом сходимости $R > 0$, то этот ряд обязательно есть её ряд Тейлора (9.2). Функция, для которой равенство (9.2) справедливо на всём множестве сходимости её ряда Тейлора, называется *аналитической* функцией. Очевидно, что всякая аналитическая функция имеет производные любого порядка. Но не всякая бесконечно дифференцируемая функция является аналитической. К таким функциям относится, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Установим это. Вычисляя при $x \neq 0$ первую и вторую производные, имеем

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{9.5}$$

Эти формулы дают возможность предположить, что

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.6}$$

где $\{a_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ – некоторые вещественные числа ($n = 1, 2, \ldots$). Докажем формулу (9.6) методом математической индукции. При $n = 1$ (и при $n = 2$), согласно (9.5), эта формула справедлива. Пусть она верна для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$$

$$= \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+2k)a_k^{(n)}}{x^{n+2k+1}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right) \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^{(n+1)}}{x^{n+1+2k}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(n+1)} &= -(n+2)a_1^{(n)}, \\ a_k^{(n+1)} &= -(n+2k)a_k^{(n)} + 2a_{k-1}^{(n)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \\ a_{n+1}^{(n+1)} &= 2a_n^{(n)}, \end{aligned}$$

то есть формула (9.6) верна и для $n+1$. Тем самым доказана справедливость этой формулы для всех натуральных n.

Теперь покажем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{9.7}$$

Действительно, обозначив $\dfrac{1}{x^2} = t$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-m/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

(Величина последнего предела находится путём применения правила Лопиталя $\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ раз.)

Формулы (9.6) показывают, что функция (9.4) имеет все производные при $x \neq 0$. Установим, что эта функция имеет все производные и при $x = 0$. Из (9.4) и (9.7) следует, что

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0.$$

Предположим, что для некоторого натурального n величина производной $f^{(n)}(0) = 0$. Но тогда согласно (9.6) и (9.7) имеем

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(0 + \Delta x) - f^{(n)}(0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{(\Delta x)^{n+2k+1}} \right) e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} = 0,$$

то есть у функции (9.4) имеются производные любого порядка при $x = 0$. Итак, установлено, что эта функция бесконечно дифференцируема, однако для неё

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots$$

и поэтому ряд Тейлора функции (9.4) состоит из одних нулей, то есть сходится везде, но к $f(x)$ лишь при $x = 0$.

Таким образом, мы видим, что для исследования возможности представления функции $f(x)$ (естественно, бесконечно дифференцируемой) её рядом Тейлора (9.2) становится необходимым изучать поведение остаточного члена $r_n(x, f)$ *формулы Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f). \tag{9.8}$$

Ясно, что если $r_n(x, f) \to 0$ для некоторого x, то ряд Тейлора для этого x сходится к значению $f(x)$, если же остаточный член $r_n(x, f) \rightrightarrows r(x) \equiv 0$ на каком-то множестве X, то и ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Нам понадобятся следующие формы остаточного члена формулы (9.8):

- форма Лагранжа

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \theta = \theta_L \in (0,1); \qquad (9.9)$$

- форма Коши

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \theta = \theta_C \in (0,1). \quad (9.10)$$

Теорема 9.1. Для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \qquad (9.11)$$

причём для любого $A \in (0, +\infty)$ степенной ряд в (9.11) сходится равномерно к e^x на отрезке $[-A, A]$.

Доказательство. Так как для функции $f(x) = e^x$ и для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ производная $f^{(k)}(x) = e^x$ и, следовательно, $f^{(k)}(0) = 1$, то ряд (9.11) является рядом Тейлора (9.2) этой функции.

Для любого $A > 0$ остаточный член в форме Лагранжа (9.9) допускает оценку

$$|r_n(x,f)| \leqslant \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad x \in [-A, A].$$

Но предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ как предел общего члена *сходящегося*, как нетрудно видеть, по признаку Даламбера знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{[-A,A]}{\rightrightarrows} e^x. \qquad (9.12)$$

Для всякого $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ возьмём $A > |x_0|$ и получим, согласно (9.12), что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} = e^{x_0}$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. Для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \end{aligned} \tag{9.13}$$

причём для любого $A \in (0, +\infty)$ степенные ряды в (9.13) сходятся равномерно к соответствующим функциям на отрезке $[-A, A]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы и поэтому *не приводится*.

Теорема 9.3. Во всех точках сходимости ряда (8.7) (то есть при $x \in (-1, 1]$) справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,, \quad -1 < x \leqslant 1. \tag{9.14}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = \ln(1+x)$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = \ln(1+x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x}\,,\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\,, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{9.15}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (8.7) (или, другими словами, ряд в (9.14)) является рядом Тейлора (9.2) функции $f(x) = \ln(1+x)$.

Пусть $x \in (-1, 1)$. Тогда из (9.10) и (9.15) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

допускает оценку

$$|r_n(x, f)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\,,$$

и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}\,, \quad -1 < x < 1. \tag{9.16}$$

то есть равенство (9.14) справедливо при $x \in (-1, 1)$. Но ряд в (9.16) сходится и при $x = 1$. Согласно второй теореме Абеля (теореме 8.8) устремляя в (9.16) переменную x к $1-0$, получаем, что равенство (9.14) справедливо и при $x = 1$. Теорема доказана.

Равенство (9.14) при $x = 1$ принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Таким образом, с помощью разложения в ряд Тейлора (9.2) функции $f(x) = \ln(1+x)$ можно найти сумму знакочередующегося числового *ряда Лейбница*. (Величина этой суммы получена ранее: см. (3.8).)

Теорема 9.4. Во всех точках сходимости ряда (8.8) справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\, x^n. \tag{9.17}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = (1+x)^\alpha$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{9.18}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (8.8) (или, другими словами, ряд в (9.17)) является рядом Тейлора (9.2) функции $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Тогда, как отмечалось на с. 115 и с. 118, ряд (8.8) становится *конечной* суммой. Нетрудно видеть, что эта сумма является представлением функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ по формуле бинома Ньютона.

Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ и $x \in (-1,1)$. Тогда из (9.10) и (9.18) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \\ = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

можно записать в виде

$$\begin{gathered} r_n(x,f) = \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\,x^n\times \\ \times\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\times\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n. \end{gathered} \tag{9.19}$$

Рассмотрим поочерёдно все три сомножителя (отделённые друг от друга знаком "$\times$") в представлении (9.19) остаточного члена $r_n(x,f)$.

Первый сомножитель, то есть

$$\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-1-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-1-n+1)}{n!}\,x^n,$$

является общим членом ряда (8.8), построенного для значения параметра $\alpha-1$. Так как этот ряд сходится для любого $x\in(-1,1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\,x^n=0. \tag{9.20}$$

Второй сомножитель, то есть $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$, как нетрудно видеть, при любом $x\in(-1,1)$ допускает оценку

$$\begin{aligned} &|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\leqslant \alpha\cdot 2^{\alpha-1}, && \alpha>0,\\ &|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\leqslant \frac{|\alpha|}{(1-|x|)^{|\alpha|+1}}, && \alpha<0, \end{aligned} \tag{9.21}$$

не зависящую от n.

Третий сомножитель, то есть $\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, так же как при доказательстве предыдущей теоремы, при всех $x\in(-1,1)$ допускает оценку

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\leqslant 1, \tag{9.22}$$

тоже не зависящую от n.

Из (9.20), (9.21) и (9.22) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x,f)=0,\quad -1<x<1,$$

то есть

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\,x^n,\ |x|<1. \tag{9.23}$$

Это означает, что равенство (9.17) справедливо для всех значений $x \in (-1, 1)$. Если ряд (8.8) сходится при $x = -1$ или $x = 1$ (условия сходимости ряда (8.8) при $x = \pm 1$ приведены на с. 119), то переходя в равенстве (9.23) к пределу при $x \to -1 + 0$ или $x \to 1 - 0$ (нетрудно видеть, что функция $(1 + x)^\alpha$ допускает такой предельный переход) и применяя вторую теорему Абеля, получаем, что равенство (9.17) справедливо и при предельном значении x, входящем в множество сходимости ряда (8.8). Теорема доказана.

Варианты домашних заданий

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и указать множество, где полученный ряд сходится к функции $f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}\,,$ $\qquad x_0 = 0.$
2. $f(x) = \ln\bigl(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,\bigr),$ $\qquad x_0 = -1.$
3. $f(x) = \ln\bigl(1 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\bigr),$ $\qquad x_0 = 1.$
4. $f(x) = \ln x,$ $\qquad x_0 = 3.$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}\,,$ $\qquad x_0 = -2.$
6. $f(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 2}\,\bigr),$ $\qquad x_0 = 0.$
7. $f(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 3}\,\bigr),$ $\qquad x_0 = 0.$
8. $f(x) = \ln\bigl(\sqrt{x^2 + 4} - x\bigr),$ $\qquad x_0 = 0.$
9. $f(x) = \ln\bigl(\sqrt{x^2 + 5} - x\bigr),$ $\qquad x_0 = 0.$

10. $f(x) = \ln(x+2),$ $\quad x_0 = 2.$

11. $f(x) = \ln(3-x),$ $\quad x_0 = 1.$

12. $f(x) = \sin^4 x,$ $\quad x_0 = 0.$

13. $f(x) = \cos^4 x,$ $\quad x_0 = 0.$

14. $f(x) = \arccos \dfrac{x}{2},$ $\quad x_0 = 0.$

15. $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x,$ $\quad x_0 = 0.$

16. $f(x) = 5^{x^3},$ $\quad x_0 = 0.$

17. $f(x) = 6^{-2x^4},$ $\quad x_0 = 0.$

18. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-\pi x}{1+\pi x}},$ $\quad x_0 = 0.$

19. $f(x) = \operatorname{sh}^3 x,$ $\quad x_0 = 0.$

20. $f(x) = \operatorname{ch}^3 x,$ $\quad x_0 = 0.$

21. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt,$ $\quad x_0 = 0.$

22. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sh} t^3 dt,$ $\quad x_0 = 0.$

23. $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt,$ $\quad x_0 = 0.$

24. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}\,,$ $x_0 = 0.$

25. $f(x) = (1-x)\ln(1-x),$ $x_0 = 0.$

26. $f(x) = \sin^2\sqrt{x},$ $x_0 = 0.$

27. $f(x) = \cos^2\sqrt{x},$ $x_0 = 0.$

28. $f(x) = \operatorname{sh}^2\sqrt{x},$ $x_0 = 0.$

29. $f(x) = \operatorname{ch}^2\sqrt{x},$ $x_0 = 0.$

30. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}\,,$ $x_0 = 0.$

Александр Петрович Горячев

Числовые и функциональные ряды
(*курс лекций и варианты домашних заданий*)

Редактор
Оригинал-макет изготовлен автором

Подписано в печать . Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Уч.-изд. л. . Печ. л. . Тираж экз.
Изд. № . Заказ .

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31