Комплексные числа. Операции над комплексными числами. Комплексная плоскость.

Комплексное число можно представить в алгебраической и тригонометрической (экспоненциальной) формах
$z = (x, y) = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, φ-аргумент комплексного числа, главное значение аргумента комплексного числа $\arg z \in (-\pi, \pi]$, общее значение $Arg\ z = \arg z + 2\pi k$. Формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Сопряженное число $\bar{z} = x - iy, z = x + iy$. Основные свойства комплексного сопряжения

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bullet \bar{z}_2, z\bar{z} = |z|^2$$

Формулы для возведения в степень и извлечения корня

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Если $z^n = w, z = \sqrt[n]{w}, z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\psi}$, тогда

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, k = 0,1,\ldots,n-1.$$

1. Представить в алгебраической и тригонометрической формах число $z = \dfrac{1-i}{1+i}$.

   Решение. Домножая числитель и знаменатель дроби на сопряженное комплексное число, получим $z = \dfrac{(1-i)^2}{2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

2. Извлечь корень третей степени из комплексного числа i.

   Решение. $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}, z = \sqrt[3]{i} = re^{i\varphi}, r = 1, \varphi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k, k = 0,1,2$.

   $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}, z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

3. Классифицировать кривую $|z-2|+|z+2|=6$.

   Решение. Так как $|z-z_0|$ геометрически представляет собой расстояние между точками z и z_0, то данной уравнение описывает геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух точек *(2,0)* и *(-2,0)* равна 6. Таким образом, это эллипс с фокусами расположенными в этих точках.

4. Классифицировать кривую $|z|=Re z+1$.

   Решение. Уравнение в координатах: $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$, возведем в квадрат, заметив, что должно выполняться неравенство x ≥ -1. Получим уравнение параболы $y^2=2x+1$, которая целиком лежит в области x ≥ -1, поэтому лишних решений при возведении в квадрат приобретено не было.

Элементарные функции

1.Первоначальное значение Arg f(z) при z=2 принято равным 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку z=2. Проследить за непрерывным изменением аргумента функции при этом обходе контура и указать конечное значение Arg f(2) после указанного оборота, если

1) $f(z)=\sqrt{z-1}$

2) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$

3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$

4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$

Решение 1). Обозначим контур обхода $z(t)=2e^{it}, t\in[0,2\pi]$ и $w(t)=z(t)-1=\rho e^{i\psi(t)}$. По формуле извлечение квадратного корня

$$Argf(z(t))=\frac{\psi(t)}{2}+\frac{2\pi}{2}k, k=0,1 \qquad (1)$$

В начальной точке обхода $\psi(0)=0$ (сделать рисунок и убедиться в этом). По условию в этой начальной точке Arg f(2)=0, поэтому, как это следует из (1) k=0. Из сделанного рисунка можно отследить, как будет изменяться угол $\psi(t)$ при полном обходе контура. Значение этого угла в конечной точке будет равно 2π. Подставляя это значение в формулу (1) получим ответ π.

Решение 2). Используя те же обозначения, что и в предыдущем примере для z(t) имеем другую формулу для величины аргумента функции

$$Argf(z(t))=\frac{\psi(t)}{3}+\frac{2\pi}{3}k, k=0,1,2.$$

Все остальные геометрические наблюдения остаются те же самые. По прежнему будет k=0. Ответ $2\pi/3$.

Решение 3). В этом случае аргумент $\psi(t)$ изменится от 0 до 4π (необходимо сделать чертеж). Это связано с тем, что при полном обходе окружности радиуса 2 точкой z(t) точка $z^2(t)$ обойдет окружность радиуса 4 два раза. В результате этого обхода аргумент функции $z^2(t)-1$ изменится от 0 до 4π. В этом примере k=0. Ответ $4\pi/2=2\pi$.

Решение 4). Для того, чтобы отследить изменение аргумента функции z^2+2z-3 представим ее в виде $w(t)=(z(t)+1)^2-4$. Исследуя поведение последней функции можно установить, что точка w(t) делает два оборота, но только один вокруг начала координат (имеется небольшая петля в диапазоне от –7.4 до –3 по x). Таким образом, для получения конечного значения аргумента по формуле (1) в качестве значения $\psi(2\pi)$ следует взять не 4π, а 2π. Ответ π.

1. Первоначальное значение Im f(z) при z=2 равно 0. Точка z делает один оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку z=2. Проследить за непрерывным

изменением мнимой части функции при этом обходе контура и указать конечное значение Im f(2) после указанного оборота, если

1) $f(z) = 2Ln\, z$

2) $f(z) = Ln\dfrac{1}{z}$

Решение 1). Обозначим контур обхода $z(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ и $w(t) = 2Ln(z(t)) = 2\ln 2 + i2(t + 2\pi k)$. По условию k=0. При обходе контура t изменяется от 0 до 2π. Подставляя конечное значение в предыдущее выражение получим ответ 4π.

Решение 2). В этом случае $w(t) = Ln\dfrac{1}{z(t)} = \ln\dfrac{1}{2} + i(-t + 2\pi k)$. По прежнему k=0. Ответ -2π.

2. Найти сумму ряда 1+cos x +…+cos nx.

   Решение. Используя формулы Эйлера представим данную сумму в виде
   $$S = \sum_{k=0}^{n}\cos kx = \sum_{k=0}^{0}\operatorname{Re} e^{ikx} = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \operatorname{Re}\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \operatorname{Re}\frac{(1 - e^{i(n+1)x})(1 - e^{-ix})}{(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})}.$$
   После некоторых преобразований получим
   $$S = \frac{1}{2} + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Конформные отображения

Непрерывное, взаимно однозначное отображение *w=f(z)* области *D* на область *D** называется конформным, если в каждой точке D имеет место

1) свойство сохранения углов
2) сохранение масштабов.

Если *f(z)* аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение *w=f(z)* конформно в некоторой окрестности точки z_0.
Углом между кривыми $z_1(t)$, $z_2(t)$, в бесконечности (предполагается, что $\lim\limits_{t\to\alpha} z_1(t) = \lim\limits_{t\to\beta} z_2(t) = \infty$) называется угол в *0* между образами этих кривых при отображении *w=1/z*, то есть между кривыми
$w_1(t) = \dfrac{1}{z_1(t)}, t \to \alpha; w_2(t) = \dfrac{1}{z_2(t)}, t \to \beta$ в т. 0. Изменение масштаба в ∞ находится аналогичным образом, предварительно переведя ∞ в точку 0 отображением w=1/z.

Решение задач с преобразованиеv углов и масштабов при отображении *w=f(z)*	
Задача	Решение
1. $z_0 \neq \infty, f(z_0) \neq \infty$	См. $f'(z_0)$
2. $z_0 = \infty, f(z_0) \neq \infty$	См. $w_1 = f(1/w)$ в точке $w_0 = 0$

3. $z_0\neq\infty, f(z_0)=\infty$	См. $w_1=\dfrac{1}{f(z)}$ в точке z_0
4. $z_0=\infty, f(z_0)=\infty$	См. $w_1=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ в точке $w_0=0$

1. Исследовать на конформность функцию $w=\dfrac{z-1}{z-i}$ в расширенной комплексной области.

Решение. В точках отличных от i и ∞ конформность следует из существования производной и не равенству её нулю.

В точке $z=i$ значение функции $w=\infty$, поэтому для исследования в этой точке нужно рассмотреть функцию $\omega_1=\dfrac{1}{w}=\dfrac{z-i}{z-1}$ в точке $z=i$, (см. таблицу п. 3). Конформность следует из существования производной и не равенства её нулю при $z=i$.

В точке $z=\infty$ $w=1$, поэтому для исследования на конформность в этой точке следует «бесконечность в аргументе» перевести предварительно в 0 (или, что то же заменить ∞ на 0 с помощью замены переменного $z=\dfrac{1}{\zeta}$). Таким образом, для исследования берётся функция $w=\dfrac{\frac{1}{\zeta}-1}{\frac{1}{\zeta}-i}=\dfrac{1-\zeta}{1-i\zeta}$ в точке 0, которая в этой точке имеет производную, отличную от нуля.

2. Исследовать на конформность в точке $z=\infty$ функцию $w=iz-2$.

Решение. Во всех точках $z\neq\infty$ производная существует и не равна нулю. При $z=\infty$, $w=\infty$, поэтому, согласно определению, необходимо сделать две замены: $z=\dfrac{1}{\zeta}$, и $\omega=\dfrac{1}{w}$. В итоге, для исследования на конформность имеем функцию $w=\dfrac{1}{i\frac{1}{\zeta}-2}=\dfrac{\zeta}{i-2\zeta},\zeta=0$ Эта функция в точке $\zeta=0$ имеет производную не равную нулю.

3. Доказать непосредственно свойство сохранения углов в т. $2i$ при отображении $w=\dfrac{2z}{z-2i}$.

Решение. Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ выходят из точки $2i$. Для первой кривой $t\in[\alpha_1,\beta_1]$, для второй $t\in[\alpha_2,\beta_2]$. Точка $2i$ переходит в бесконечность, поэтому будем искать углы между кривыми $w(t)=\dfrac{1}{w_1(t)}, w_1(t)=\dfrac{2z_1(t)}{z_1(t)-2i}$ и

$w(t)=\dfrac{1}{w_2(t)}, w_2(t)=\dfrac{2z_2(t)}{z_2(t)-2i}$ в точках α_1, α_2, соответственно. Для этих кривых имеем

$$w'=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{z_k-2i}{z_k}\right)=\frac{1}{2}\frac{z_k'z_k-z_k'(z_k-2i)}{z_k^2}=\frac{iz_k'}{z_k^2}\Bigg|_{\text{в тточкахгде } z_k=2i}=-\frac{\mathrm{i}}{4}z_k'$$, поэтому

угол между образами w_k в бесконечности будет равен:

$$\arg\left(-\frac{i}{4}z_2'\right)-\arg\left(-\frac{i}{4}z_1'\right)=\arg\left(-\frac{i}{4}\right)+\arg(z_2')-\arg\left(-\frac{i}{4}\right)-\arg(z_1')=\arg(z_2')-\arg(z_1')$$

3. Найти угол в ∞ между действительной и мнимой осями.

Решение. Введем параметризацию осей. Для действительной оси положим $z_1(t)=1/t, t\to 0$, для мнимой оси положим $z_2(t)=i/t, t\to 0$. По определению углом в ∞ между этими кривыми называется угом между образами этих кривых при отображении $w=1/z$ в точке $w=0$. Таким образом, следует искать угол между кривыми $w_1(t)=1/z_1(t)=t$ *и* $w_2(t)=1/z_2(t)=t/i$ при $t\to 0$. Ответ: $\pi/2$.

4. Используя дробно линейное отображение перевести единичный круг $|z|<1$ в верхнюю полуплоскость $Im\ w > 0$.

Решение. Воспользуемся круговым свойством дробно линейного отображения и свойством сохранения симметричных точек. Переведем точки 0, ∞, симметричные относительно окружности $|z|=1$ в симметричные относительно вещественной оси плоскости w точки i и –i, $0 \to i$, $\infty \to -i$. В этом случае образом исходной окружности в плоскости z будет некоторая окружность, относительно которой точки i и – i будут симметричны. Кроме того, переведем какую-нибудь точку границы исходной области (окружности $|z|=1$) в какую-нибудь точку границы требуемой области (вещественной оси плоскости w), например, $1\to 0$. Последнее условие обеспечит то, что образом окружности будет вещественная прямая. Последнее следует из простого свойства симметричных точек. Если две точки симметричны относительно некоторой окружности, проходящей через середину отрезка их соединяющего, то эта окружность является прямой. Из условия $\infty \to -i$ получим $c=i$. И, наконец, условие $0 \to$ I дает d= Ответ:

$$w=\frac{z-1}{iz+i}.$$

5. Используя дробно линейное отображение перевести область D*:* $Im\ z > Re\ z$ в область D^**:* $|w-1|>1$.

Решение. Возьмем какие-нибудь две симметричные точки относительно ∂D и переведем одну из них в ∞, а другую в точку 1. В таком случае исходная прямая отобразится в окружность с центром в 1. Для того, чтобы эта окружность имела радиус 1, достаточно перевести какую-нибудь точку исходной прямой в точку, лежащую на единичной окружности. Эти три условия можно реализовать, например, так: $-1+i\to=\infty$, $1-i\to=1$, $0\to 0$. Требуемое отображение легко находится по этим условиям. Ответ:

$$w=\frac{z}{z-(-1+i)}\frac{2-2i}{1-i}=\frac{2z}{z+1-i}.$$

Интегральная формула Коши

Пусть задана аналитическая функция f в области D, ограниченной конечным числом кривых. Тогда в любой точке $z \in D$ функция f представима в виде

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-u} dz,$$

где ∂D - ориентированная граница *D*. Интеграл в правой части равенства называется интегралом Коши.

1. Вычислить интеграл

$$I = \int_C \frac{dz}{z^2+9},$$

если 3i лежит внутри контура C, а точка –3i вне его.

Решение. Представим интеграл *I* в виде интеграла Коши

$$I = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-3i} \frac{1}{z+3i} dz = 2\pi i \frac{1}{z+3i}\Big|_{z=3i} = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Вычислить интеграл из примера 1, если контур C представляет собой окружность с центром в начале координат и радиуса 4.

Решение. Область, ограниченную данным контуром разобьем отрезком γ:[4i,-4i] на две области D_1,D_2. Представим интеграл *I* в виде суммы двух интегралов

$$\int_C = \int_A + \int_B = \int_A + \int_E + \int_F + \int_B = \int_{AE} + \int_{FB}.$$

Здесь A – левая полуокружность, проходимая против часовой стрелки, B-правая полуокружность, проходимая против часовой стрелки, E-отрезок [-4i,4i], F-отрезок [4i,-4i], AE=A+E, FB=F+B. Интегралы в правой части полученного равенства можно представить в виде интегралов Коши.

$$\int_{AE} = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{AE} \frac{1}{z+3i} \frac{1}{z-3i} dz = 2\pi i \frac{1}{z-3i}\Big|_{z=-3i} = -2\pi i \frac{1}{6i} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\int_{FB} = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_{AE} \frac{1}{z-3i} \frac{1}{z+3i} dz = 2\pi i \frac{1}{z+3i}\Big|_{z=3i} = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, вычисляемый интеграл равен нулю.

3. Вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3},$$

если точка a лежит внутри контура C.

Решение. Рассмотрим интеграл Коши

$$ue^u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{z-u},$$

Дифференцируя это равенство дважды получим

$$e^u + ue^u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-u)^2}, 2e^u + ue^u = \frac{1}{2\pi i} 2\int_C \frac{ze^z dz}{(z-u)^3},$$

Откуда следует, что

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-u)^3} = e^u \frac{2+u}{2},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = f(a) = e^a\,\frac{2+a}{2}.$$

4. Вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3},$$

если точка 0 лежит внутри контура C, а точка 1 вне контура C.

Решение. Данный интеграл является интегралом Коши для функции $e^z/(1-z)^3$, поэтому он равен $e^z/(1-z)^3$, при z=0, таким образом I=1.

5. Вычислить интеграл из примера 4

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$$

если точка 1 лежит внутри контура C, а точка 0 лежит вне контура C.

Решение. Рассмотрим интеграл Коши

$$\frac{e^u}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(z-u)},$$

Дифференцируя это равенство дважды получим

$$e^u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(z-u)^2}, e^u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right) + e^u\left(-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}\right) = \frac{1}{2\pi i}2\int_C \frac{e^z dz}{z(z-u)^3},$$

Откуда

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(z-u)^3} = \frac{e^u}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}+\frac{2}{u^3}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} = -f(1) = -\frac{e}{2}(1-2+2) = -\frac{e}{2}.$$

6. Вычислить интеграл из примера 4

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$$

если обе точки 0 и 1 лежат внутри контура C.

Решение. Разрежем область, ограниченную контуром на две с помощью некоторой кривой так, чтобы 0 попал в одну половину, а 1 в другую. Требуемый интеграл можно представить в виде суммы двух, вычисленных в предыдущих примерах. Поэтому в результате получим 1 – e/2.

7. Вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z^2+a^2}, a > 0.$$

C-верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиуса 10.

Решение. Данный интеграл является интегралом Коши для функции f(z)=1/(z + ia) и u = ia

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-ia)(z+ia)}, a > 0.$$

Поэтому I = f(ia) = 1/(2ai).

8. Вычислить интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}, a>0.$$

C-верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиуса 10.
Решение. Отметим, что

$$F(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-u)(z+ia)^2}=\frac{1}{(u+ia)^2}.$$

Продифференцируем это равенство

$$G(u)=\frac{d}{du}F\quad(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-u)^2(z+ia)^2}=-\frac{2}{(u+ia)^3}.$$

Таким образом

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-ai)^2(z+ai)^2}=G(ia)=-\frac{2}{(2ai)^3}=\frac{1}{4a^3i}$$

9. Вычислить интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^2}, a>0.$$

C-верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиуса 10.
Решение. Представим интеграл в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z^2+a^2)dz}{(z^2+a^2)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a^2dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z^2+a^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a^2dz}{(z^2+a^2)^2}$$

Учитывая результаты примеров 8 и 9, получим

$$I=\frac{1}{2ai}-\frac{a^2}{4a^3i}=\frac{1}{4ai}$$

Разложение в ряд Лорана. Изолированные особые точки.

Точка a из расширенной комплексной плоскости называется изолированной особой точкой функцииf, если существует такая проколотая окрестность точки a, в которой функция f аналитична. Изолированная особая точка a функции f называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to a} f(z)=A$$

.

Изолированная особая точка a функции f называется *полюсом*, если

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$$

.

В остальных случаях изолированная особая тоска называется *существенно особой точкой*.
Разложением функции в кольце $V=\{\ r<|\ z-a\ |<R\ \}$ в ряд Лорана называется разложение вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (1).$$

Главной частью лорановского разложения называется часть, содержащая отрицательные степени z-a. Любую функцию f, аналитическую в кольце V, можно представить в этом кольце в виде ряда (1). Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, (n = 0,\pm 1,\pm 2,...),\ (2)$$

где $\gamma = \{|z-a| = \rho\}, r < \rho < R$.

Конечная изолированная особая точка а функции f(z) будет устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение (1) функции f в окрестности точки а не содержит главной части.

Конечная изолированная особая точка а функции f(z) будет полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения (1) функции f(z) в окрестности точки а содержит лишь конечное число отличных от нуля членов.

Порядком полюса а функции f называется порядок этой точки, как нуля функции 1/f. Точка а является нулем k-го порядка функции f(z), если $f(a) = f^1(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0.$

Если а является нулем k-го порядка функции f(z), то f(z) = (z - a)^k g(z), где g(a) не равно нулю.

1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ в окрестности i и ∞.

Решение. $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2}\dfrac{1}{(z+i)^2}$. Для разложения функции $\dfrac{1}{(z+i)^2}$ в ряд воспользуемся тем, что она есть производная от функции

$-\dfrac{1}{z+i} = -\dfrac{1}{z-i+2i} - \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{(1+\dfrac{z-i}{2i})} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(2i)^{k+1}}$. Дифференцируя этот ряд почленно, получим $\dfrac{1}{(z+i)^2} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k(z-i)^{k-1}}{(2i)^{k+1}} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(k+1)(z-i)^k}{(2i)^{k+2}}$. Домножая полученное выражение на $\dfrac{1}{(z-i)^2}$ получим $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(k+1)(z-i)^{k-2}}{(2i)^{k+2}}$.

Разложение функции *f(z)* в окрестности ∞. Положим $F(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, тогда $F'(z) = -2z f(z)$, $f(z) = -\dfrac{F'(z)}{2z}$. Найдем разложение функции *F(z)* в ряд Лорана в окрестности ∞. Имеем $F(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{z^{2k+2}}$.

Дифференцируя этот ряд почленно, получим $F'(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{2k+2}{z^{2k+3}}$.

Откуда окончательно получаем

$$f(z) = -\frac{F'(z)}{2z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+2}\frac{k+1}{z^{2k+4}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{z^{2k+2}},\ |z|>1.$$

2. Найти особые точки функции. Найти разложение функции в ряд Лорана в окрестности каждой особой точки.

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+1)}$$

Решение. Точка z = 0 является полюсом второго порядка, так как эта точка является нулем второго порядка функции $z^2(z^2+1)$. Для того, чтобы получить разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки воспользуемся стандартным разложением в ряд Тейлора бинома (геометрическая прогрессия)

$$z^2 f(z)=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},$$

откуда получаем лорановское разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-2}.$$

Точки z = i, z = -i являются полюсами первого порядка, как нули функции $z^2(z+i)(z+i)$.. Для того, чтобы получить разложение в ряд Лорана в окрестности точки i, воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции (z - i) f(z)

$$(z-i)f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}=\frac{z-i}{z^2}-\frac{1}{z+i},$$

Разложение функции $1/z^2$ в ряд Тейлора получаем дифференцированием: $f'(z)=-2/z^3$, $f^{(n)}=(-1)^n(n+1)!/z^{n+2}$. Откуда

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{i^{n+2}}(z-i)^n.\frac{z-i}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{i^{n+2}}(z-i)^{n+1}.$$

Разложение функции 1/(z+i) можно получить, как стандартное

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{1}{2i(1+\frac{z-i}{2i})}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}.$$

Из полученных формул получаем разложение в ряд Лорана

$$f(z)==\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{i^{n+2}}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}.$$

3. Разложить в ряд по степеням z – 1 функцию f(z) = z/(z+2).

Решение. Воспользуемся стандартным разложением бинома для функции 1/(z+2) в окрестности точки 1.

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{3(1-(-\frac{z-1}{3}))}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}.$$

Полученный ряд сходится в круге | z – 1 | < 3. Таким образом, для функции f(z) получим

$$f(z)=\frac{z}{z+2}=\frac{(z-1)+1}{z+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{3^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{3^n}(z-1)^n.$$

Разложение справедливо в круге | z – 1 | < 3.

4. Разложить в ряд по степеням z – 1 функцию f(z) = z/(z^2-2z+5).

Решение. Заданную функцию преобразуем следующим образом

$$\frac{z}{z^2-2z+5}=\frac{(z-1)+1}{(z-1)^2+4}=\frac{(z-1)+1}{4(1+\frac{(z-1)^2}{4})}=\frac{(z-1)+1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}.$$

В последнем равенстве использовано стандартное разложение для бинома. Полученный ряд имеет радиус сходимости равный 4. Производя некоторые преобразования, окончательно получим

$$\frac{z}{z^2-2z+5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n+1}}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится в круге | z – 1 | < 4.

5. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки 0 функцию

$$f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^3}.$$

Решение. Воспользуемся стандартным разложением

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

и продифференцируем данное равенство дважды

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)z^n\ ,$$

$$\frac{2}{(1+z)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)z^n\ .$$

Умножая полученный ряд на z^2 получим требуемое разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)z^{n+2}\ .$$

Радиус сходимости полученного ряда равен 1.

6. Разложить в ряд Тейлора по степеням z – b функцию f(z) = 1/(z^2+a^2), где a > 0.

Решение. Разложим заданную функцию на элементарные дроби

$$\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{(z-ia)(z+ia)}=\frac{1}{2ai}(\frac{1}{z-ia}-\frac{1}{z+ia}).$$

Для каждой из полученных дробей находим лорановские разложения

$$\frac{1}{z-ia}=\frac{1}{(z-b)+b-ia}=\frac{1}{c(1+\frac{z-b}{c})}=\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{c^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{c^{n+1}}\ ,$$

где c = b – ia. Аналогично, получаем разложение для второй дроби

$$\frac{1}{z+ia}=\frac{1}{(z-b)+b+ia}=\frac{1}{d(1+\frac{z-b}{d})}=\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{d^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{d^{n+1}}\ ,$$

где d = b + ia. Объединяя оба разложения в один ряд Лорана, окончательно получим

$$\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{2ai}(\frac{1}{z-ia}-\frac{1}{z+ia})=\frac{1}{2ai}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{c^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{d^{n+1}})=$$

$$= \frac{1}{2ai}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{c^{n+1}} - \frac{1}{d^{n+1}})(z-b)^n, c = b - ia, d = b + ia.$$

7. Функцию f(z) = $(z^2$-2z+5)/((z-2)$(z^2$+1)) разложить в ряд Лорана в окрестности точки z = 2 и в кольце 1 < | z | < 2.
Решение. Функция f(z) имеет в точке z = 2 полюс первого порядка, поэтому можно избавиться от этой особенности умножением этой функции на z – 2. Полученную таким образом функцию g(z) = (z – 2) f(z) мы разложим в ряд Тейлора по степеням z – 2. Для разложения функции g(z) в ряд Тейлора воспользуемся формулами из предыдущего примера.

$$g(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 + 1} = \frac{z^2 - 2z + 5}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}})(z-2)^n =$$

$$= \frac{z^2 - 2z + 5}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^n, e_n = (-1)^n(\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}})$$

Функцию z^2-2z+5 представим в виде

$$z^2 - 2z + 5 = ((z-2)+2)^2 - 2((z-2)+2) + 5 = (z-2)^2 + 2(z-2) + 13.$$

Таким образом, требуемое разложение будет иметь вид

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{(z-2)^2 + 2(z-2) + 13}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^{n-1} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^{n+1} +$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^n + \frac{13}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^{n-1} = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}e_{n-1}(z-2)^n + \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z-2)^n + \frac{13}{2i}\sum_{n=-1}^{\infty}e_{n+1}(z-2)^n =$$

$$= \frac{13e_0}{2i(z-2)} + \frac{2e_0 + 13e_1}{2i} + \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}(e_{n-1} + 2e_n + 13e_{n+1})(z-2)^n.$$

Для получения разложения в ряд Лорана в кольце 1 < | z | < 2 представим функцию f(z) в виде

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{(z^2 - 2z + 5)}{5}(\frac{1}{z-2} - \frac{z+2}{z^2+1}).$$

Функцию 1/(z-2) раскладываем в ряд Тейлора в круге |z| < 2.

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{2^{n+1}}, |z| < 2.$$

Функцию (z+2)/$(z^2$+1) раскладываем в ряд по степеням z в окрестности бесконечности

$$\frac{z+2}{z^2+1} = \frac{z+2}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} = \frac{z+2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}} =$$

Вычисление вычетов.

Вычетом функции *f(z)* в конечной изолированной особой точке a называется число

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta,$$

где C-окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a, пробегаемая против часовой стрелки. Вычет в бесконечности (∞-изолированная особая точка) определяется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(\zeta)d\zeta ,$$

где C^- -окружность достаточно большого радиуса, пробегаемая по часовой стрелке. Вычет функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке a равен коэффициенту c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана при $(z-a)^{-1}$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \operatorname*{Res}_{a} f(z) = c_{-1} .$$

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке ∞ равен коэффициенту $-c_{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана при z^{-1}

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} .$$

Если у аналитической функции f(z) имеется лишь конечное чисто изолированных особых точек, то сумма вычетов в этих точках, включая вычет в ∞ равна нулю.

Если a – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right).$$

В случае полюса первого порядка формула имеет вид

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \lim_{z\to a}\left((z-a) f(z)\right).$$

1. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ относительно всех изолированных особых точек (и.о.т.).

Решение. Функция имеет два полюса второго порядка в точках i и –i. В ∞ имеется устранимая особенность.

$$\operatorname*{Res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+i}\right)^2 =$$

$2\left(\dfrac{z}{z+i}\right)\left(\dfrac{z+i-z}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i} = -\dfrac{i}{4}$. Аналогично $\operatorname*{Res}_{-i} f(z) = \dfrac{i}{4}$. Из формулы для суммы вычетов следует, что $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$.

2. Найти вычет функции $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ относительно всех изолированных особых точек.

Решение. Функция имеет две и.о.т. 0 и ∞. Воспользуемся разложением экспоненты в ряд Тейлора для получения разложения исходной функции в ряд Лорана.

$$f(z) = e^z e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!z^m}\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{k-m}}{k!m!}$$

Разложение имеет место в кольце 0<|z|<∞. Найдем коэффициент c_{-1} этого разложения. Для получения этого слагаемого необходимо выполнение условия k-m=-1, откуда m=k+1. Учитывая это, получим

$$c_{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}.$$

3. Найти вычет функций $f(z)=ctg^2 z$ относительно всех изолированных особых точек.

Решение. Покажем вначале, что функции *sin z* и *cos z* в комплексной плоскости имеют нули только на вещественной оси. Действительно,

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}=\frac{1}{2i}(\cos x(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{-y}+e^{y}))=$$

$\sin x\, ch\, y+i\cos x\, sh\, y$. Откуда следует, что $\sin z = 0$ лишь в случае $\sin x = 0$ и $sh\, y = 0$. Аналогично для функции *cos z* имеем: $\cos z=\cos x\, ch\, y-i\sin x\, sh\, y$. Откуда следует, что $\cos z = 0$ лишь в случае $\cos x = 0$ и $sh\, y = 0$. Таким образом, исходная функция имеет только полюсы второго порядка в нулях синуса, т.е. в точках πk. Так как $ctg^2 z=\frac{1}{\sin^2 z}-1$ и вычет единицы равен нулю, то вычеты можно считать для функции $\frac{1}{\sin^2 z}$. Имеем

$$\lim_{z\to\pi k}\frac{d}{dz}\frac{(z-\pi k)^2}{\sin^2 z}=\lim_{z\to\pi k}\frac{d}{dz}\frac{(z-\pi k)^2}{\left(\sin(z-\pi k)\cos\pi k\right)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{u}{\sin u}\right)^2.$$

$\frac{d}{dz}\left(\frac{u}{\sin u}\right)^2=2\frac{u}{\sin u}\frac{\sin u-u\cos u}{\sin^2 u}$. Воспользовавшись первыми двумя членами разложений в ряд Тейлора функций *sin* и *cos* легко установить, что бесконечно малая sin u – u cos u в нуле имеет третий порядок малости. таким образом в последнем выражении числитель имеет четвертый порядок малости, в то время, как знаменатель имеет третий порядок малости, и указанный предел равен нулю. Все вычеты равны нулю.

4. Найти вычет функций $f(z)=\sin z\sin\frac{1}{z}$ относительно всех изолированных особых точек.

Решение. Функция имеет две и.о.т. 0 и ∞. Воспользуемся разложением синуса в ряд Тейлора для получения разложения исходной функции в ряд Лорана.

$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}\frac{1}{z^{2m-1}}$. При перемножении общий член ряда Лорана будет иметь вид $c_{2k-1-2m-1}z^{2k-1-2m+1}=c_{2(k-m)}z^{2(k-m)}$. Отсюда следует, что $c_{-1}=0$. вычеты в нуле и бесконечности равны нулю.

5. Найти вычет функций $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z-2}$ относительно всех изолированных особых точек.

Решение. Функция имеет две и.о.т. 0 и ∞. Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора для получения разложения исходной функции в ряд Лорана по степеням z-2.

$$f(z)=\left((z-2)+2\right)^3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!(z-2)^{2k}}=$$

$$\left((z-2)^3+6(z-2)^2+12(z-2)+8\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k}}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k-3}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k-2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k-1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k}}$$

Коэффициент c_{-1} будет складываться из двух значений, из первой суммы при $k=2$ и третьей сумма при $k=1$

$c_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{12}{2!}=-\frac{143}{24}$. Вычет в ∞ будет равен 143/24.

6. Найти вычет функций $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ относительно всех изолированных особых точек.

Решение. Функция имеет полюс второго порядка в 0, полюс первого порядка в 1 и устранимую и.о.т. в ∞.

$\operatorname*{Res}_1 f(z)=\lim_{z\to1}\frac{z^2+z-1}{z^2}=1$. $\operatorname*{Res}_0 f(z)=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2-1+z}{z-1}\right)=$

$\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(z+2+\frac{1}{z-1}\right)=\lim_{z\to0}\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)=0$. Отсюда следует, что

$\operatorname*{Res}_\infty f(z)=-1$.

Вычисление контурных интегралов.

Если функция непрерывна вплоть до границы области D и аналитична внутри области, за исключением конечного число особых точек a_k, то

$$\int_{\partial D}f(\zeta)d\zeta=2\pi i\sum_k\operatorname*{Res}_{a_k}f(z).$$

1. Вычислить интеграл $\int_C\frac{d\zeta}{\zeta^4+1}$, $C=\{x^2+y^2=2x\}$, проходимый в положительном направлении.

Решение. Контур представляет собой окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Корни знаменателя подынтегральной функции лежат на единичной окружности и на биссектрисах первого-третьего и второго-четвертого углов. Внутрь контура С попадают два из них, лежащих в правой полуплоскости $z_0=\frac{1}{\sqrt2}(1+i), z_3=\frac{1}{\sqrt2}(1-i)$. Остальные два $z_1=\frac{1}{\sqrt2}(-1+i), z_2=\frac{1}{\sqrt2}(-1-i)$ лежат вне области.

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{1}{z^4+1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}=\frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}=$$

$$\frac{1}{(\sqrt2)(\sqrt2+i\sqrt2)(i\sqrt2)}=\frac{1}{2\sqrt2}\frac{1}{-1+i}=\frac{1}{4\sqrt2}(-1-i).$$

$$\operatorname*{Re}_{z_3}s\frac{1}{z^4+1}=\lim_{z\to z_3}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_0)}=\frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_0)}=$$

$\frac{1}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2})(-i\sqrt{2})}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{1+i}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i)$. Исходный интеграл будет равен $2\pi i\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_C\frac{d\zeta}{(\zeta-3)(\zeta^5-1)}, C=\{|z|=2\}$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Внутри контура лежат пять особых точек, вне контура две: 3- полюс первого порядка, ∞- устранимая особая точка. Вычет в точке три будем считать по формуле для полюсов, вычет в ∞ вычислим по ряду Лорана.

$\operatorname*{Re}_{3}s\,f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{1}{z^5-1}=\frac{1}{242}$. Разложение в ряд Лорана подынтегральной функции в окрестности ∞ имеет вид

$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}\frac{1}{z^5}\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{k+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{z^{5m+5}}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{5m+k+6}}$. Ряд сходится в кольце $3<|z|<\infty$. Коэффициент c_{-1} формируется из индексов, удовлетворяющих условию $5m+k+6=1$, так как таких индексов нет, то $c_{-1}=0$ и $\operatorname*{Re}_{\infty}s\,f(z)=0$, поэтому

$$\int\limits_C\frac{d\zeta}{(\zeta-3)(\zeta^5-1)}=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Re}_{z_k}s\,f(z)=-2\pi i\left(\operatorname*{Re}_{3}s\,f(z)+\operatorname*{Re}_{\infty}s\,f(z)\right)=-2\pi i\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}$$

.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_C\frac{\zeta^3d\zeta}{(2\zeta^4+1)}, C=\{|z|=1\}$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Все особые точки подынтегральной функции лежат не окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, и, таким образом, попадают внутрь контура интегрирования. Следовательно, интеграл будет равен $-2\pi i\operatorname*{Re}_{\infty}s\,f(z)$. Для вычисления вычета в ∞ воспользуемся разложением в ряд Лорана

$f(z)=\frac{z^3}{2z^4}\frac{1}{1-\frac{1}{2z^4}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{z^{4k+1}}$, откуда $c_{-1}=0.5$, следовательно

$\operatorname*{Re}_{\infty}s\,f(z)=-\frac{1}{2}$ *Ответ* πi.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_C\sin^2\frac{1}{\zeta}d\zeta$, где C – окружность $|z|=r$, проходимая в положительном направлении.

Решение. ∞ является изолированной особой точкой. Для вычисления вычета в бесконечности воспользуемся разложением в ряд Лорана.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!z^{2k-1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!z^{2m-1}}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}}{(2k-1)!(2m-1)!}\frac{1}{z^{2k+2m-2}}.$$

Не нулевой коэффициент при –1 степени формируется из индексов, удовлетворяющих условию *2k+2m-2=1, k+m=3/2*. Таких индексов нет, следовательно, интеграл равен нулю.

5. Вычислить интеграл $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\zeta^{n}e^{\frac{2}{\zeta}}d\zeta$, где n- целое и C – окружность $|z|=r$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд Лорана.

$f(z)=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!z^{k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!z^{k-n}}$. Равенство k-n=1 Будет выполнено при n ≥ -1.

Для этих значений параметра $I=c_{-1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Для остальных значений параметра n интеграл I=0.

Вычисление вещественных интегралов.

Для вычисления интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ используют следующие два вспомогательных утверждения

Лемма. Если f(z) аналитична в *{Im z >= 0 }* кроме конечного числа о.т. $a_k\in\{Im\ z>0\}$ и $\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{z\in C_R}|zf(z)|=0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=2\pi i\sum_{a_k}\operatorname{Res}f(z).$$

Здесь $C_R=\{Im\ z\geq 0,\ |z|=R\}$.

Обобщённая лемма. Если *f(z)* аналитична в *{Im z >= 0 }* кроме конечного числа о.т. $a_k\in\{Im\ z>0\}$, на вещественной оси имеются только полюсы первого порядка b_k и $\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{z\in C_R}|zf(z)|=0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=2\pi i\sum_{a_k}\operatorname{Res}f(z)+\pi i\sum_{b_k}\operatorname{Res}f(z)$$

Лемма Жордана. Если *f(z)* непрерывна в $\{\ |z|\geq R_0,\ Im\ z\geq -a,\ a>0\ \}$ и $M(R)=\max\limits_{C_R}|f(z)|\to 0, R\to\infty$ Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}e^{i\lambda z}f(z)dz=0$ для любого $\lambda>0$.

Следствие. Если для функции *f(z)* выполнены условия леммы, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum_{k}\operatorname{Res}_{a_k}f(z)e^{i\lambda z}$, где сумма берется по всем вычетам подынтегральной функции из верхней полуплоскости.

Для решения задач этого раздела можно использовать следующие оценки для значений модуля многочлена на окружности радиуса R.

$$|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots| = |a_n||R^n|\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{e^{-it}}{R} + \dots\right| \ge |a_n|R^n\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\frac{1}{R} + \dots\right) \ge mR^n,$$

где m>0. Аналогично,

$|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots| = |a_n||R^n|\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{e^{-it}}{R} + \dots\right| \le MR^n, M > 0$. Таким образом, при оценках значения рациональной функции $f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots}$ на окружности радиуса R→∞ следует смотреть лишь на старшие члены многочленов числителя и знаменателя

$\left|\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots}\right| \le MR^{n-m}$. Учитывая это, условие леммы

$\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{z\in C_R} |zf(z)| = 0$ для рациональной функции будет выполнены, если *n-m+1≤-1*, или *n-m+1<0*.

1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$

Решение. Для подынтегральной функции $f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+1)}$ выполнено условие *n-m+1=-1<0*. Далее

$$\operatorname*{Res}_0 s = 1, \operatorname*{Res}_i s = \frac{1+i}{i2i} = -\frac{1}{2}(1+i), I = \pi i + 2\pi i(-\frac{1+i}{2}) = \pi.$$

2. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}dx$

Решение. Условие леммы выполнено *n – m +1 = -2 < 0*. Нули знаменателя $z_0 = -2+3i, z_1 = -2-3i$. В верхнюю полуплоскость попадает нуль $z_0 = -2+3i$, являющийся полюсом второго порядка для *f(z)*.

$$\operatorname*{Res}_{z_0} s\, f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_1)^2 - 2(z-z_1)z}{(z-z_1)^4} =$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = -\frac{z_0+z_1}{(z_0-z_1)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = \frac{1}{54}i$. Откуда $I = -\frac{\pi}{27}$.

3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx, a > 0.$

Решение. $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$ Условие леммы выполнено *n – m +1 = -1 < 0*. Нули знаменателя $z_0 = ai, z_1 = -ai$. В верхнюю полуплоскость попадает нуль $z_0 = ai$, являющийся полюсом второго порядка для *f(z)*.

$$\operatorname*{Res}_{z_0} s\, f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-z_1)^2}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{2z(z-z_1)^2 - 2(z-z_1)z^2}{(z-z_1)^4} =$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{2z(z-z_1)-2z^2}{(z-z_1)^3}=-\frac{2z_0z_1}{(z_0-z_1)^3}=\frac{2a^2}{(2ai)^3}=\frac{1}{4ai}$. Откуда $I=\frac{1}{2}\frac{2\pi i}{4ai}=\frac{\pi}{4a}$.

4. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, a>0, b>0.$

Решение. Условие леммы выполнено *n – m +1 = -3 < 0*. В верхнюю полуплоскость попадают нули знаменателя $z_0=ai$, $z_1=bi$ являющиеся полюсами первого порядка для функции *f(z).* Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2\pi i\left(\frac{1}{2ai(-a^2-b^2)}+\frac{1}{2bi(-b^2+a^2)}\right)=$$

$$\pi\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Решение. Условие леммы выполнено *n – m +1 = -1 < 0*. Корни знаменателя подынтегральной функции лежат на единичной окружности и на биссектрисах первого-третьего и второго-четвертого углов.

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

В верхнюю полуплоскость попадают нули $z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

$I=\pi i\left(\frac{i+1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}+\frac{-i+1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right)$. Отметим, что

$z_0-z_1=\sqrt{2}, z_0-z_2=\sqrt{2}(1+i), z_0-z_3=\sqrt{2}i, z_1-z_3=\sqrt{2}(i-1),$ поэтому

Исходный интеграл будет равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$

Решение. Рассмотрим функцию $F(z)=f(z)e^{iz}=\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}$. Для функции *f(z)* выполнены условия леммы Жордана $\left|f(z)\right|\Big|_{C_R}\to 0, R\to\infty$, поэтому

$$I=\operatorname{Im}(2\pi i\operatorname*{Res}_{-2+4i}F(z))=\operatorname{Im}\left(2\pi i\frac{(-2+4i)e^{-2i-4}}{8i}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{2e^4}(-1+2i)(\cos 2-i\sin 2)\right)=$$

$$\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2).$$

7. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Указание. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{e^{2iz}-1}{z^2}$ и контурный интеграл

$\oint\limits_{\gamma_{R;r}} \dfrac{e^{2iz}-1}{z^2}dz$, где $\gamma_{R;r}$ состоит из полуокружностей $|z|=R,|z|=r$ и отрезков

$[-R,-r]$ и $[r,R]$. (Ответ $\dfrac{\pi}{2}$).

8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2}, a>0$

Указание. Рассмотреть функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ и контурный интеграл

$\oint\limits_{\gamma_R}\dfrac{dz}{(z^2+a^2)^2}$,где $\gamma_R=C_R^+\cup[-R,R]\ C_R^+: z=\mathrm{Re}^{i\varphi},\varphi\in[0,\pi]$. (Ответ $\dfrac{\pi}{4a^3}$).

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}, a>0$

Указание. Если $a\neq 1$ рассмотреть функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z+a)(Lnz-\pi i)}$ и

интеграл $\oint\limits_{\Gamma_{R;r}}\dfrac{dz}{(z+a)(Lnz-\pi i)}$, где контур состоит из двух окружностей

$|z|=R,|z|=r$, при этом $0<r<a<R, r<1<R$ и двух берегов разреза по

отрезку $[r,R]$. (Ответ $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{\ln a}, a\neq 1$)

Операционное исчисление

Преобразование Лапласа. Комплекснозначная функция f(t), $t\in(-\infty,\infty)$ называется оригиналом, если

1) $f(t)=0$ при $t<0$
2) в $\forall(a,b)$ есть лишь конечное число разрывов первого рода. Иногда, дополнительно будет требоваться выполнение условия Липшица

$|f(t+h)-f(t)|\le A|h|^{\alpha}$, для всех $h,|h|\le h_0$, $\alpha\le 1$ на интервалах непрерывности функции

3) $\exists M\ \exists s\ \forall t: |f(t)|\le Me^{st}$ (*)

Число $s_0=\inf\limits_{s\in S} s$, S – множество тех s, для которых выполенно условие (*), называется показателем роста оригинала.

Пример. Функция Хевисайда

$$H(t)=\begin{cases}1, t\ge 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

является оригиналом нулевого показателя роста.

Изображением функции оригинала f(t) (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного p=s+iσ, определяемую равенством

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Пишут F=L[f], F ÷ f, f ÷ F.

Свойства преобразования Лапласа. Далее в этом разделе везде под f(t) понимается f(t)H(t).

Преобразования Лапласа простейших функций:

$$1\div\frac{1}{p},\operatorname{Re}p>0;e^{p_0t}\div\frac{1}{p-p_0},\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}p_0,t^ne^{p_0t}\div\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

Свойство линейности αf(t)+βg(t)÷αF(p)+βG(p).

Свойство подобия. При α>0

$$f(\alpha t)\div\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Свойство запаздывания. Для τ>0 f(t-τ)÷$e^{-p\tau}$F(p).

Дифференцирование изображения $F^{(n)}$(p)÷$(-1)^n t^n$f(t).

Дифференцирование оригинала f′(t)÷pF(p)-f(0).

Следствие. $f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

Интегрирование изображения

Если f(t)÷F(p), Re p > s_0 и $\frac{f(t)}{t}$ - оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t}\div\int_p^\infty F(q)dq$$

Интегрирование оригинала.

Если f(t)÷F(p), Re p > s_0, то

$$g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau\div\frac{F(p)}{p}$$

Свертка оригиналов и умножение изображений.

Свертка определяется по формуле $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Отметим, что f*g=g*f. f*g÷F(p)G(p)

Отметим, что если f, g – оригиналы, то и f*g – оригинал.

Умножение оригиналов, свёртка изображений

$$f(t)g(t)\div\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(\tau)G(p-\tau)d\tau$$

Таблица основных свойств преобразования Лапласа

$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp$	αf(t)+βg(t)÷αF(p)+βG(p)
$1\div\frac{1}{p},\operatorname{Re}p>0;$	$e^{p_0t}\div\frac{1}{p-p_0},\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}p_0$	$t^ne^{p_0t}\div\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$
α>0 , $f(\alpha t)\div\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	τ>0, f(t-τ)÷$e^{-p\tau}$F(p)	F(p-λ)÷$e^{\lambda t}$f(t)

$(-t)^k f(t) \div \dfrac{d^k F}{dp^k}$	f'(t)÷pF(p)-f(0),	$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$\dfrac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q)dq$	$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$	

Таблица некоторых преобразований Лапласа

	Оригинал	Изображение		Оригинал	Изображение
1	t^α ($\alpha>-1$)	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	11	ch ωt	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
2	$e^{-\lambda t}$	$\dfrac{1}{p+\lambda}$	12	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$
3	$e^{-\lambda t} t^\alpha$ ($\alpha>-1$)	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\lambda)^{\alpha+1}}$	13	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$
4	sin ωt	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	14	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
5	cos ωt	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	15	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$
6	t^n sin ωt	$n!\dfrac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$	16	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\cos 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$
7	t^n cos ωt	$n!\dfrac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$	17	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\dfrac{1}{2t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin\sqrt{p}$
8	$e^{-\lambda t}$ sin ($\omega t+\alpha$)	$\dfrac{\omega\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	18	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\dfrac{1}{2t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos\sqrt{p}$
9	$e^{-\lambda t}$ cos ($\omega t+\alpha$)	$\dfrac{-\omega\sin\alpha+(p+\lambda)\cos\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	19	$\sqrt{\dfrac{1}{\pi t}}\sin\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$
10	sh ωt	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	20	$\sqrt{\dfrac{1}{\pi t}}\cos\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$

Пример 1. $x''+a^2x=b\sin at$, общие начальные данные x_0, x_1,

$b\sin at \div b\dfrac{a}{p^2+a^2}$, поэтому

$$(p^2+a^2)X(p)=\frac{ab}{p^2+a^2}+px_0+x_1,\ X(p)=\frac{ab}{(p^2+a^2)^2}+x_0\frac{p}{p^2+a^2}+x_1\frac{1}{p^2+a^2}$$

Согласно 5 из таблицы $\dfrac{px_0}{p^2+a^2} \div x_0\cos at$,

согласно 4 из таблицы $\dfrac{x_1}{p^2+a^2} \div x_1\dfrac{\sin at}{a}$, согласно 6 из таблицы $t\sin at \div \frac{\operatorname{Im}(p+ia)^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$, отсюда, используя свойство интегрирования оригинала, получим $\int_0^t t\sin at dt \div \frac{2a}{(p^2+a^2)^2}$, откуда

$\frac{ab}{(p^2+a^2)^2} \div \frac{b}{2}\int_0^t t\sin at dt = \frac{b}{2a^2}(\sin at - at\cos at)$. Окончательно

$$x(t) = \frac{b}{2a^2}(\sin at - at\cos at) + x_0\cos at + x_1\frac{\sin at}{a} = \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)\frac{\sin at}{a} + \left(x_0 - \frac{bt}{2a}\right)\cos at$$

Пример 2. x‴+3x″+3x′+x=1, нулевые начальные условия.

$(p+1)^3X(p)=1/p$, $X(p) = \frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}$. Откуда

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t}$$

Пример 3. x‴+x=1, нулевые начальные условия.

$X(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}$ Оригинал находим по второй теореме Хевисайда

$$x(t) = H(t)\sum_k \operatorname{Re}s\ \frac{e^{pt}}{p(p^3+1)}$$

$$\sum_k \operatorname{Re}s = \operatorname*{Re}_0 s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{-1} s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{0.5(1+i\sqrt{3})} s\ \frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{0.5(1-i\sqrt{3})} s\ \frac{e^{pt}}{p(p^3+1)}$$

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{3} + 2\operatorname{Re}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}}{-3} = 1 - \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$$

Пример 3. x‴+x=1, нулевые начальные условия.

$X(p) = \frac{1}{p(p^3+1)} = \frac{1}{p(p^3+1)(p-z_1)(p-z_2)}$, $z_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), z_2 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

По второй теореме Хевисайда

$$x(t) = H(t)\left[\operatorname*{Re}_0 s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{-1} s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{z_1} s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)} + \operatorname*{Re}_{z_2} s\frac{e^{pt}}{p(p^3+1)}\right] =$$

$$= H(t)\left[1 - \frac{e^{-t}}{3} + 2\operatorname{Re}\frac{e^{z_1 t}}{-3}\right]$$

Пример 4. $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t$, нулевые условия. Используя 4 из таблицы, получим $X(p) = \frac{1}{(p^4+2p^2+1)(p^2+1)} = \frac{1}{(p^2+1)^3}$. По второй теореме Хевисайда

$$x(t)=H(t)\left[\operatorname{Re}_{i}s\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}+\operatorname{Re}_{-i}s\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}\right]=H(t)2\operatorname{Re}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right)\Bigg|_{p=i}=$$

$$H(t)\left(\frac{1}{3}(3-t^3)\sin t-\frac{3}{8}t\cos t\right)$$

Пример 5. $x''+\omega^2x=a[H(t)-H(t-b)]$, нулевые начальные условия.

$$X(p)(p^2+\omega^2)=\frac{a}{p}-\frac{a}{p}e^{-bp},X(p)=\frac{a(1-e^{-bp})}{p(p^2+\omega^2)}$$

$\dfrac{a}{p(p^2+\omega^2)}=\dfrac{a}{p(p-i\omega)(p+i\omega)}\div x(t)$, по второй теореме Хевисайда

$$x(t)=H(t)\left[\operatorname{Re}_{0}s\frac{ae^{pt}}{p(p^2+\omega^2)}+\operatorname{Re}_{i\omega}s\frac{ae^{pt}}{p(p^2+\omega^2)}+\operatorname{Re}_{-i\omega}s\frac{ae^{pt}}{p(p^2+\omega^2)}\right]=$$

$$=H(t)\left[\frac{a}{\omega^2}+\frac{ae^{pt}}{p(p+i\omega)}\bigg|_{p=i\omega}+\operatorname{Re}_{-i\omega}s\frac{ae^{pt}}{p(p-i\omega)}\bigg|_{p=-i\omega}\right]=$$

$$=H(t)\left[\frac{a}{\omega^2}+\frac{ae^{i\omega t}}{i\omega 2i\omega}+\frac{ae^{-i\omega t}}{i\omega 2i\omega}\right]=H(t)\left[\frac{a}{\omega^2}-\frac{a}{2\omega^2}2\cos\omega t\right]=H(t)\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\omega t$$

Свойство запаздывания дает $\dfrac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)}\div\dfrac{2a}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega(t-b)}{2}H(t-b)$

Окончательно $x(t)=\dfrac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\dfrac{\omega t}{2}H(t)-\sin^2\dfrac{\omega(t-b)}{2}H(t-b)\right]$

Пример 6.

$x'+ax=f(t)$, нулевые условия

$$X(p)=\frac{F(p)}{p+a}$$

$$F(p)\div f(t)H(t),\frac{1}{p+a}\div g(t)=e^{-at}H(t)$$

$$F(p)\frac{1}{p+a}\div(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)H(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)H(\tau)e^{-a(t-\tau)}H(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_{0}^{t}f(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$$