Уравнения математической физики.
Факультет ЭТФ (5 семестр).
лектор Орловский Д.Г.

Классификация уравнений в частных производных.

Уравнением в частных производных для функции $u = u(x_1, \dots, x_n)$ называется уравнение следующего вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots\right) = 0, \tag{1}$$

где F – некоторая функция конечного числа аргументов. Наибольший порядок производных, входящих в уравнение (1), называется порядком этого уравнения. Если функцмя F зависит от неизвестной функции и всех ее производных линейно, то уравнение называется линейным. Наш курс посвящен линейным уравнениям второго порядка. Общий вид такого уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + d(x) = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots x_n)$.

Матрицу (a_{ij}) будем назывть матрицей уравнения (2). Для любого решения уравнения (2) мы будем всегда предполагать непрерывность всех производных, входящих в это уравнение. В этом случае частные производные не зависят от порядка дифференцирования и поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Таким образом, уравнение (2) содержит подобные члены, которые можно перегруппировать так, что матрица уравнения станет симметричной. В самом деле, рассмотрим слагаемые, отвечающие коэффициентам a_{ij} и a_{ji} и пусть $A_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, тогда $A_{ij} = A_{ji}$ и

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = (a_{ij} + a_{ji})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= 2A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + A_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Проделав это со всеми подобными слагаемыми, мы получим то же самое уравнение, но с новыми коэффициентами A_{ij}, удовлетворяющими условию симметрии. Таким образом, можно без ограничения общности предполагать, что симметрична исходная матрица уравнения (2), что мы в дальнейшем всегда и будем делать.

Определение. Характеристической формой уравнения (2) в точке x называется квадратичная форма переменной $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j. \tag{3}$$

В зависимости от типа квадратичной формы (3) определяется и тип уравнения (2). Из курса линейной алгебры известно, что существует такое линейное преобразование независимых переменных, что в новых переменных квдратичная форма имеет нормальный вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \xi_i^2, \tag{4}$$

где ε_i равно либо 1, либо -1, либо 0. При этом такое преобразование определяется неоднозначно, но число коэффициентов, равных 1, число коэффициентов, равных -1, и число коэффициентов, равных нулю (сигнатура формы) всегда одно и то же.

Определение. Если в нормальной форме (3) все коэффициенты отличны от нуля и имеют один знак, т. е. либо все равны 1, либо все равны -1, то уравнение (2) называется уравнением эллиптического типа (или, просто, эллиптическим уравнением).

Определение. Если в нормальной форме (3) ровно один коэффициент равен 1, а все остальные равны -1 или наоборот, ровно один коэффициент равен -1, а все остальные равны 1, то то уравнение (2) называется уравнением гиперболического типа (или, просто, гиперболическим уравнением).

Определение. Если в нормальной форме (3) ровно один коэффициент равен 0, а все остальные коэффициенты отличны от нуля и имеют один знак (т. е. либо все равны 1, либо все равны -1), то уравнение (2) называется уравнением параболического типа (или, просто, параболическим уравнением).

Отметим, что эта классификация неполна, так как она охватывает не все возможные случаи. Однако, в нашем курсе мы будем иметь дело только с уравнениями этих трех типов и более детальную классификацию рассматривать не будем.

Корректность по Адамару.

Для описания физического процесса, помимо уравнения, приходится задавать дополнительные данные – начальные и граничные условия (исходные данные). Совокупность уравнения, начальных и граничных данных представляет математическую модель физического процесса, которую обычно называют математической постановкой задачи. Адамаром сформулировал условия, которые, по его мнению отражают минимальные требования к математической модели (в дальнейшем математическую модель мы будем называть просто задачей). Эти требования сводятся к следующим трем пунктам:

1) Задача должна иметь решение.
2) Решение должно быть единственным.
3) Решение должно непрерывно зависеть от исходных данных.

Задача, для которой эти условия выполнены, называется корректной по Адамару (или просто корректной). Дальнейшее развитие математической физики показало необходимость изучения и некорректных задач. В нашем курсе теории некорректных задач мы касаться не будем и курс будет посвящен исключительно корректным задачам.

Приведение к каноническому виду линейным преобразованием независимых переменных.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с n независимыми переменными и симметричной матрицей $A = (a_{ij})$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u + d(x) = 0 \tag{1}$$

$(x = (x_1, \dots x_n))$.

Определение. Уравнение (1) имеет канонический вид если матрица A диагональна и все диагональные элементы равны либо 1, либо -1, либо 0.

Определение. Характеристической формой уравнения (1) называется квадратичная форма

$$Q(\xi_1, \dots \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j. \tag{2}$$

Из курса линейной алгебры известно, что линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1 \\ \dots \\ \widetilde{\xi}_n \end{pmatrix}$$

форму Q можно привести к нормальному виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \widetilde{\xi}^{\,2},$$

где все коэффициенты ε_i равны либо 1, либо -1, либо 0.

Приведение уравнения (1) к каноническому виду тесно связано с приведением характеристической формы (2) к нормальному виду.

Сделаем в уравнении (1) линейную замену независимых переменных с матрицей перехода T:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \dots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы перехода будем обозначать t_{ij}. Элементы обратной матрицы T^{-1} обозначим $t_{ij}^{(-1)}$, а элементы транспонированной матрицы T^* обозначим t_{ij}^* $(t_{ij}^* = t_{ji})$. В этом случае

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \dots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

так, что

$$\widetilde{x}_k = t_{k1}^{(-1)} x_1 + \dots + t_{kn}^{(-1)} x_n.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \widetilde{x}_x}{\partial x_i} = t_{ki}^{(-1)}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \, \frac{\partial \widetilde{x}_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k}. \tag{3}$$

Еще раз применяя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_m} \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) \frac{\partial \widetilde{x}_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} \; t_{mj}^{(-1)} =$$

$$= \sum_{k,\,m=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m}. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (1) и, учитывая, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k,\,m=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} = \sum_{k,\,m=1}^{n} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m},$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} b_i \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right)$$

приходим к следующему уравнению

$$\sum_{k,\,m=1}^{n} \widetilde{a}_{km} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} + cu + d = 0, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{a}_{km} = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)}, \tag{6}$$

$$\widetilde{b}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} b_i. \tag{7}$$

Эти формулы легко переписать в матричном виде. Введем кроме матрицы A исходного уравнения, матрицу $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ нового уравнения, а также векторы

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\widetilde{b}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \dots \\ \widetilde{b}_n \end{pmatrix},$$

составленные из коэффициентов при первых производных. Нетрудно видеть, что формулы (6) и (7) принимают следующий вид

$$\widetilde{A} = T^{-1} A \left(T^{-1}\right)^*, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{b}} = T^{-1} \overrightarrow{b}. \tag{9}$$

Теорема 1. Пусть матрица $\mathcal{T}$ приводит характеристическую форму Q к нормальному виду, тогда матрица

$$T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^* \tag{10}$$

приводит уравнение (1) к каноническому виду.

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что матрица $\mathcal{A}$ квадратичной формы Q в новых координатах вычисляется по формуле

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^* A \mathcal{T}.$$

Матрица нового уравнения определяется формулой (8). Так как операции взятия обратной матрицы и транспонирования перестановочны, то

$$\widetilde{A} = T^{-1} A \left(T^{-1}\right)^* = \left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^{-1} A \left(\left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^{-1}\right)^* =$$

$$= \left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^{-1}\right)^* A \left(\left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^*\right)^{-1} = \mathcal{T}^* A \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{T}^* A \mathcal{T} = \mathcal{A}.$$

Так как матрица $\widetilde{A}$ нового уравнения совпадает с матрицей $\mathcal{A}$ квадратичной формы нормального вида, то уравнение (5) имеет канонический вид. Теорема доказана.

Приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим следующее уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0. \qquad (1)$$

в предположении, что в каждой точке хотя бы один из коэффициентов $a(x,y)$, $b(x,y)$ или $c(x,y)$ отличен от нуля (т. е. это уравнение действительно имеет второй порядок).

Для такого уравнения классификация по типу выглядит следующим образом: если $b^2 - ac > 0$, то уравнение (1) имеет гиперболический тип, случай $b^2 - ac = 0$ отвечает уравнению параболического типа, а при $b^2 - ac < 0$ мы имеем уравнение эллиптического типа.

Сделаем произвольную замену независимых переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \qquad (2)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\eta_x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_y + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\eta_y. \end{cases} \qquad (3)$$

Вычисляя вторые производные, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_x^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\xi_x\eta_x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_x^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{xx} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{xx}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_x\xi_y + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_x\eta_y + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{xy} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{xy}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_y^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\xi_y\eta_y + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_y^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{yy} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{yy}. \end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1), получаем уравнение

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{f}(\xi,\eta,u,\partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0, \qquad (5)$$

в котором

$$\begin{cases} \widetilde{a} = a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2, \\ \widetilde{b} = a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y, \\ \widetilde{c} = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2. \end{cases} \qquad (6)$$

Функция $\widetilde{f}$ сейчас для нас не представляет интереса и поэтому ее явный вид нам не нужен.

Проделав несложные выкладки, можно убедиться в том, что

$$\widetilde{b}^{\,2} - \widetilde{a}\,\widetilde{c} = (b^2 - ac)\left(\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)}\right)^2.$$

Отсюда следует, что при произвольной замене независимых переменных тип уравнения не меняется.

Рассмотрим приведение уравнения (1) к каноническому типу в том случае, когда оно имеет гиперболический тип ($b^2 - ac > 0$). На первом этапе приведем его к виду, в котором среди вторых производных присутствует только смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial\xi, \partial u/\partial\eta) = 0. \tag{7}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $a \neq 0$. В самом деле, если одновременно $a = 0$ и $c = 0$, то из неравенства $b^2 - ac > 0$ следует, что $b \neq 0$ и после деления уравнения (1) на $2b$ оно принимает вид (7). Если же $c \neq 0$, то можно поменять переменные, заменив x на y, а y на x. В этом случае коэффициенты a и c меняются местами и нужное условие будет выполнено.

Для приведения уравнения (1) к виду (7) подберем новые переменные так, чтобы в (5) коэффициенты $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ были равны нулю. Из равенств (6) следует, что эти переменные должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2 = 0, \\ a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Фактически, эти два уравнения представляют из себя одно

$$a\,\varphi_x^2 + 2b\,\varphi_x\varphi_y + c\,\varphi_y^2 = 0. \tag{9}$$

В самом деле, если заменить в (9) φ на ξ, то получим первое уравнение в (8), а если заменить φ на η, то получим второе уравнение.

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением для уравнения (1).

Разделив уравнение (9) на φ_y^2, получим квадратное уравнение

$$a\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2b\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0,$$

решая которое, находим

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Это приводит к двум линейным уравнениям в частных производных первого порядка

$$a\varphi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\varphi_y = 0,$$
$$a\varphi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\varphi_y = 0.$$

(При $\varphi_y = 0$ делить на φ_y^2 нельзя, однако, в этой ситуации и уравнение (9) и полученная пара уравнений сводится к одному и тому же равенству $\varphi_x = 0$, что говорит об их равносильности и в этом случае.)

Пусть ξ - решение первого из них, а η - решение второго, т. е.

$$\begin{cases} a\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0, \\ a\eta_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\eta_y = 0, \end{cases} \tag{10}$$

тогда обе функции $\varphi = \xi$ и $\varphi = \eta$ удовлетворяют уравнению (9), т. е. равенствам (8). Это означает, что после замены (2) уравнение (1) будет приведено к виду

$$\widetilde{b}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial\xi, \partial u/\partial\eta) = 0. \tag{11}$$

Так как при замене (2) тип уравнения не меняется, то $\widetilde{b}^2 - \widetilde{a}\widetilde{c} > 0$, но $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ равны нулю, поэтому $\widetilde{b} \neq 0$ и, разделив уравнение (11) на $\widetilde{b}$, получим уравнение (7).

Отметим также, что для того, чтобы ξ и η можно было взять за новые переменные, они должны быть функционально независимы, т. е.

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

Здесь можно сослаться на курс обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором изучается уравнение

$$A(x, y)\varphi_x + B(x, y)\varphi_y = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)}. \tag{13}$$

Функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (12) тогда и только тогда, когда она является первым интегралом уравнения (13). Если функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, причем всюду величина $A^2 + B^2 \neq 0$, то уравнение (12), по крайней мере локально, имеет непрерывно дифференцируемое решение $\varphi(x, y)$, для которого всюду $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$.

Пусть у нас имеется два таких уравнения

$$A_1(x, y)\xi_x + B_1(x, y)\xi_y = 0 \quad \text{и} \quad A_2(x, y)\eta_x + B_2(x, y)\eta_y = 0$$

и решения этих уравнений, для которых $\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$ и $\eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0$. Если коэффициенты этих уравнений (A_1, B_1) и (A_2, B_2) не пропорциональны, то

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

В самом деле, первое из этих уравнений равносильно ортогональности векторов $\{A_1, B_1\}$ и $\{\xi_x, \xi_y\}$, а второе уравнение равносильно ортогональности векторов $\{A_2, B_2\}$ и $\{\eta_x, \eta_y\}$. Так как векторы $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ не пропорциональны, то не пропорциональны и ортогональные им векторы $\{\xi_x, \xi_y\}$ и $\{\eta_x, \eta_y\}$. Следовательно, отличен от нуля и их определитель

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)}.$$

В нашем случае $A_1 = a$, $B_1 = b - \sqrt{b^2 - ac}$, $A_2 = a$, $B_2 = b + \sqrt{b^2 - ac}$. Определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b - \sqrt{b^2 - ac} \\ a & b + \sqrt{b^2 - ac} \end{vmatrix} = 2a\sqrt{b^2 - ac} \neq 0.$$

Следовательно, коэффициенты уравнений (10) не пропорциональны. Поэтому если брать решения этих уравнений с $\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$ и $\eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0$, то функции ξ и η будут функционально независимы.

Второй этап состоит в преобразовании уравнения (7). Так как обозначение переменных является непринципиальным моментом, то для удобства вернемся к переменным x и y, а уравнение (7) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0. \tag{14}$$

В этом уравнении сделаем замену

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y. \end{cases} \tag{15}$$

По формулам (4) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Отсюда следует, что уравнение (14) преобразуется к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0. \tag{16}$$

Отметим, что формулы преобразования (15) второго этапа всегда одни и те же, независимо от рассматриваемого уравнения. Поэтому, при приведении к каноническому виду уравнения гиперболического типа, принято второй этап опускать, а уравнение (7) также считать каноническим, наряду с уравнением (16). Подчеркнем, что это исключение делается только для уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим приведение уравнения (1) к каноническому типу в том случае, когда оно имеет параболический тип ($b^2 - ac = 0$). Без ограничения общности можно считать, что $a \neq 0$. В самом деле, если $a = 0$, то из равенства $b^2 - ac = 0$ следует, что $b = 0$, но тогда $c \neq 0$ и, разделив исходное уравнение на c, получим уравнение в канонической форме.

В параболическом случае оба уравнения в (10), фактически, совпадают и мы имеем одно уравнение

$$a\,\xi_x + b\,\xi_y = 0, \tag{17}$$

из которого можно найти решение $\xi(x, y)$ с $\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$. Покажем, что в качестве второй переменной $\eta(x, y)$ можно взять любую функцию, удовлетворяющую условию

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

Прежде всего отметим, что такие функции существуют. Например, если $\xi_x \neq 0$, то подходит $\eta(x, y) = y$, так как

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi_x \neq 0.$$

Если же $\xi_y \neq 0$, то можно выбрать $\eta(x, y) = x$ и тогда

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\xi_y \neq 0.$$

Из уравнения (17) следует, что функция $\varphi = \xi$ является решением характеристического уравнения, следовательно,

$$a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x \xi_y + c\,\xi_y^2 = 0,$$

что в соответствии с формулами (6) означает, что $\widetilde{a} = 0$. Преобразуем выражения для $\widetilde{b}$. Учитывая (17), находим

$$\widetilde{b} = a\,\xi_x \eta_x + b\,(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\,\xi_y \eta_y = (a\,\xi_x \eta_x + b\,\xi_y \eta_x) + (b\,\xi_x \eta_y + c\,\xi_y \eta_y) =$$

$$= (a\,\xi_x + b\,\xi_y)\eta_x + (b\,\xi_x + c\,\xi_y)\eta_y = (b\,\xi_x + c\,\xi_y)\eta_y.$$

Так как мы предполагаем, что $a \neq 0$, то из условия параболичности $b^2 - ac = 0$ находим $c = b^2/a$ и поэтому в силу (17)

$$b\,\xi_x + c\,\xi_y = b\,\xi_x + \frac{b^2}{a}\,\xi_y = \frac{b}{a}(a\,\xi_x + b\,\xi_y) = 0.$$

Таким образом, в уравнении (5) $\widetilde{a} = 0$ и $\widetilde{b} = 0$. Покажем, что $\widetilde{c} \neq 0$. Допустим противное: $\widetilde{c} = 0$. Величина $\widetilde{c}$ определяется равенством (6). Учитывая, что $c = b^2/a$, получаем

$$\widetilde{c} = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 = (a\,\eta_x^2 + b\,\eta_x\eta_y) + (b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2) =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + (b\,\eta_x + c\,\eta_y)\eta_y = (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + \left(b\,\eta_x + \frac{b^2}{a}\,\eta_y\right)\eta_y =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + \frac{b}{a}\,(a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_y = (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\left(\eta_x + \frac{b}{a}\,\eta_y\right) = \frac{1}{a}(a\,\eta_x + b\,\eta_y)^2.$$

Так как $\widetilde{c} = 0$, то

$$a\,\eta_x + b\,\eta_y = 0.$$

Преобразуем якобиан функций ξ и η, используя свойства определителей

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a\,\xi_x & \xi_y \\ a\,\eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a\,\xi_x + b\,\xi_y & \xi_y \\ a\,\eta_x + b\,\eta_y & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & \xi_y \\ 0 & \eta_y \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили противоречие с тем, что этот якобиан отличен от нуля. Следовательно, наше предположение неверно и $\widetilde{c} \neq 0$. Разделив уравнение (5), в котором $\widetilde{a} = 0$ и $\widetilde{b} = 0$ на $\widetilde{c}$, получим параболическое уравнение в каноническом виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0,$$

где $\widetilde{F} = \widetilde{f}/\widetilde{c}$.

Рассмотрим приведение к каноническому виду эллиптического уравнения, для которого $b^2 - ac < 0$. В этом случае из (9) мы получаем уравнения с комплексными коэффициентами

$$a\varphi_x + (b \pm i\sqrt{ac - b^2})\varphi_y = 0.$$

Теория решения уравнения (12) переносится и на уравнения с комплексными коэффициентами $A(x, y)$, $B(x, y)$. Первые интегралы (комплекснозначные) уравнения (13) совпадают с решениями уравнения (12). Если функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, причем всюду $|A|^2 + |B|^2 \neq 0$, то уравнение (12), по крайней мере локально, имеет непрерывно дифференцируемое решение $\varphi(x, y)$, для которого $|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \neq 0$.

Для определения замены, приводящей уравнение (1) к каноническому виду, нам достаточно рассмотреть одно этих уравнений. Выберем, например, уравнение

$$a\varphi_x + (b + i\sqrt{ac - b^2})\varphi_y = 0 \tag{18}$$

(второе уравнение будет иметь комплексно сопряженные решения). Покажем, что вещественная и мнимая части решения уравнения (18), удовлестворяющего условию $|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \neq 0$, дают искомые переменные, в которых уравнение имеет какнонический вид. Пусть

$$\varphi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y). \tag{19}$$

Функция, удовлетворяющая уравнению (18), является также и решением уравнения (9). Подставляя (19) в (9), получаем

$$a\,(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b\,(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c\,(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0.$$

Выполняя арифметические действия и отделяя вещественную и мнимую части, приходим к двум равенствам

$$a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\,\xi_y + c\,\xi_y^2 = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\,\eta_y + c\,\eta_y^2, \tag{20}$$

$$2(a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y) = 0. \tag{21}$$

Сравнивая это с формулами (6) видим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \widetilde{c}, \\ \widetilde{b} &= 0. \end{aligned}$$

Для эллиптического уравнения $\widetilde{b}^2 - \widetilde{a}\widetilde{c} < 0$, откуда следует, что ни $\widetilde{a}$, ни $\widetilde{c}$ не могут быть равны нулю (иначе получится, что $\widetilde{b}^2 < 0$). Разделив уравнение (5), в котором $\widetilde{b} = 0$, на общее значение $\widetilde{a} = \widetilde{c}$, получим каноническое уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0,$$

в котором $\widetilde{F} = \widetilde{f}/\widetilde{a}$.

Уделим, теперь, время якобиану преобразования (2). Перейдя в уравнении (18) к комплексно сопряженным величинам, получим для сопряженной функции $\overline{\varphi}$ уравнение

$$a\overline{\varphi}_x + (b - i\sqrt{ac - b^2})\overline{\varphi}_y = 0. \tag{22}$$

Коэффициенты уравнений (18) и (22) не пропорциональны, так как

$$\begin{vmatrix} a & b + i\sqrt{ac - b^2} \\ a & b - i\sqrt{ac - b^2} \end{vmatrix} = -2ai\sqrt{ac - b^2} \neq 0.$$

Следовательно, якобиан

$$\frac{\mathcal{D}(\varphi, \overline{\varphi})}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

Из равенств $\varphi = \xi + i\eta$, $\overline{\varphi} = \xi - i\eta$ находим

$$\xi = \frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\overline{\varphi}, \quad \eta = \frac{1}{2}\,\varphi - \frac{1}{2}\,\overline{\varphi},$$

откуда получаем

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(\varphi, \overline{\varphi})} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Свойство произведения якобианов распространяется и на комплекснозначные отображения, поэтому

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} = \frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(\varphi, \overline{\varphi})} \cdot \frac{\mathcal{D}(\varphi, \overline{\varphi})}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

Этим заканчивается рассмотрение эллиптического случая.