1 Понятия вектора и ковектора. Сопряжённые пространства. Обозначения Эйнштейна.

Опр. 1.1. **Вектором** мы будем называть **набор чисел** вида:

$$\mathbf{x} = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}.$$

Ковектором мы будем называть **набор чисел** вида:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть у нас задано $n-$мерное Евклидово пространство векторов L (то есть линейное пространство со скалярным произведением) с ортонормированным базисом

$$\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}.$$

Очевидно, в базисе $\{\mathbf{e}\}$ вектор $\mathbf{e}_i$ имеет координаты:

$$(\mathbf{e}_i)_{\{\mathbf{e}\}} = \{0\ \ldots\ 0\ \overset{i}{1}\ 0\ \ldots\ 0\}. \tag{1}$$

Опр. 1.2. Назовём **$n-$мерное пространство L^* ковекторов** **сопряжённым пространством к L**, а базис

$$\{\mathbf{e}^*\} = \{\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \ldots,\ \mathbf{e}^n\}$$

сопряжённым базисом к $\{\mathbf{e}\}$, если

$$\mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Замечание 1.1. Мы ввели сопряжённые пространства и базисы формально, ровно в той степени, какой достаточно для наших дальнейших рассмотрений. Однако изначально эти понятия появились другим образом:
пространство, сопряжённое к L, вводилось как пространство линейных функционалов над L (линейным функционалом называется линейный оператор $L \longrightarrow \mathbb{R}$).
сопряжённый базис строился как набор функционалов $\mathbf{e}^j$ над L, удовлетворяющих равенству:

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ j \neq i, \quad (i, j = \overline{1,\ n}); \\ 0, & \text{если } \ j = i. \end{cases}$$

Здесь выражение $\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i)$ понимается как линейный функционал $\mathbf{e}^j$ применённый к вектору $\mathbf{e}_i \in L$.
Подробно и последовательно это проделано в книге [5], Лекция 4, стр. 33-35.
Более простой и формальный подход изложен в [2], Гл.8, §1.

1.1 Обозначения Эйнштейна.

А. Эйнштейн ввёл обозначения, удобные для сокращения записи формул, содержащих большое количество сумм по всевозможным индексам. Например, выражение скалярного произведения вектора на ковектор

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y^k$$

в обозначениях Эйнштейна примет вид:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_k y^k.$$

Опр. 1.3 (Обозначения Эйнштейна).
Принимаются следующие соглашения:

1. Суммирование ведётся по каждому индексу, встречающемуся 1 раз вверху и 1 раз внизу.
2. Все индексы принимают натуральные значения от 1 до n (напомним, что $n-$ размерность пространств L и L^*).
3. В выражениях вида $\frac{\partial a^i}{\partial x^k}$ индекс k считается нижним.

Пример 1.1.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x^i}\mathbf{e}_i, \qquad \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i}, \qquad (\mathbf{a},\ \nabla) = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

2 Матрицы перехода.

Пусть в пространстве L кроме базиса $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$ (не обязательно ортонормированного) задан базис $\{\mathbf{e}'\} = \{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n\}$. Пусть вектора этих базисов связаны соотношением:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_j = c^{j'}_j \mathbf{e}_{j'} \tag{2}$$

или, в матричной форме:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{e}'C^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'},$$

где матрица

$$C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \left(c^i_{i'}\right) = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & \vdots & c^n_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & \vdots & c^n_{2'} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ c^1_{n'} & c^2_{n'} & \vdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = C^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \left(c^{j'}_j\right) = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & c^{1'}_2 & \vdots & c^{1'}_n \\ c^{2'}_1 & c^{2'}_2 & \vdots & c^{2'}_n \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ c^{n'}_1 & c^{n'}_2 & \vdots & c^{n'}_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

В $i-$ой строке матрицы $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}$ стоят координаты вектора $\mathbf{e}'_i$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$.
Заметим, что для удобства мы всегда будем использовать штрихованные индексы для номера строчки.
Исторически сложилось, что элементы матриц $C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}$ и $C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}}$ обозначаются $c_1^1,\ \ldots,\ c_n^n$. Но в случае, когда хотя бы один из базисов – не ОНБ, **ЭТО – РАЗНЫЕ ЧИСЛА**: $c_{i'}^{j} \neq c_i^{j'}$.

Заметим, что матрица перехода от одного ОНБ к другому ОНБ обязана быть **ортогональной**, то есть обладать свойством $C^{-1} = C^T$. Отсюда следует соотношение для элементов матрицы C в случае, когда оба базиса – ортонормированные:

$$c_i^k c_k^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases}$$

(скалярное произведение $i-$ой строки на $j-$ый столбец равно δ_i^j.)

В то же время в сопряжённом пространстве ковекторов возьмём базисы, сопряжённые к $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}'\}$:

$$\{\mathbf{e}^*\} \quad \text{и} \quad \{\mathbf{e}'^*\}.$$

Для них имеют место аналогичные соотношения:

$$\mathbf{e}^{*j'} = c_j^{j'} \mathbf{e}^{*j}, \qquad \mathbf{e}^{*i} = c_{i'}^{i} \mathbf{e}^{*i'} \tag{5}$$

или, в матричной форме:

$$\mathbf{e}'^* = C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} \mathbf{e}^*, \qquad \mathbf{e} = C^{-1}_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} \mathbf{e}'^*,$$

где матрица

$$C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} = C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = \left(c_i^{i'}\right) = \begin{pmatrix} c_1^{1'} & c_2^{1'} & \vdots & c_n^{1'} \\ c_1^{2'} & c_2^{2'} & \vdots & c_n^{2'} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ c_1^{n'} & c_2^{n'} & \vdots & c_n^{n'} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$C_{\mathbf{e}'^*\to\mathbf{e}^*} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \left(c_{i'}^{i}\right) = \begin{pmatrix} c_{1'}^{1} & c_{1'}^{2} & \vdots & c_{1'}^{n} \\ c_{2'}^{1} & c_{2'}^{2} & \vdots & c_{2'}^{n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ c_{n'}^{1} & c_{n'}^{2} & \vdots & c_{n'}^{n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

В $i-$ом столбце матрицы $C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*}$ стоят координаты вектора $\mathbf{e}'^*_i$ в базисе $\{\mathbf{e}^*\}$.

3 Понятие тензора.

Опр. 3.1 (см. также [2] (стр. 253) и [5] (стр. 60).).
Тензором T типа (p, q) и ранга $r = p + q$ называется закон, по которому каждому набору $(x_1, \ldots, x_p;\ y^1, \ldots, y^q)$ из p векторов пространства L и набору q ковекторов пространства L^* ставится в соответствие число, равное

$$T(x_1, \ldots, x_p;\ y^1, \ldots, y^q) = x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} \cdot y^1_{j_1} \ldots y^q_{j_q} \cdot T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}, \tag{8}$$

где $(x_s^1, \ldots, x_s^n)$– координаты вектора $x_s = x_s^i \mathbf{e}_i$ $\quad s = \overline{1,\ n}$,
$(y_1^r, \ldots, y_n^r)$– координаты ковектора $y^r = y_j^r \mathbf{e}^j$ $\quad r = \overline{1,\ n}$,
а $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$– некоторые числа, называемые **компонентами тензора T**.
Равенство (8) надо понимать в смыле обозначений Эйнштейна, помня, что по всем индексам $i_1, \ldots, i_p;\ j_1, \ldots, j_q$ ведётся суммирование от 1 до n.
Частным случаем равенства (8) является равенство

$$T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p};\ \mathbf{e}^{j_1}, \ldots, \mathbf{e}^{j_q}) = T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p},$$

в котором набору $(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p};\ \mathbf{e}^{j_1}, \ldots, \mathbf{e}^{j_q})$ ставится в соответствие число $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$.

Утверждение 3.1 (Тензорный закон преобразования координат).
Усл. *Базисы* $\{\mathbf{e}\}$ *и* $\{\mathbf{e}'\}$ *пространства* L *связаны равенством*

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_j = c^{j'}_j \mathbf{e}_{j'}, \tag{2}$$

а сопряжённые к ним базисы $\{\mathbf{e}^*\}$ *и* $\{\mathbf{e}'^*\}$ *пространства* L^* *связаны равенством*

$$\mathbf{e}^{*j'} = c^{j'}_j \mathbf{e}^{*j}, \qquad \mathbf{e}^{*i} = c^i_{i'} \mathbf{e}^{*i'} \tag{5}$$

Утв. *Имеет место соотношение:*

$$T^{j'_1 \ldots j'_q}_{i'_1 \ldots i'_p} = c^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot c^{i_p}_{i'_p} \cdot c^{j'_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot c^{j'_q}_{j_q} \cdot\ T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}, \tag{9}$$

называемое тензорным законом преобразования координат.

Доказательство. В самом деле, в силу связи между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ и ковекторами $\mathbf{e}^*$ и $\mathbf{e}'^*$ в (2) и (5), применив (8), получим:

$$T^{j'_1 \ldots j'_q}_{i'_1 \ldots i'_p} = T(\mathbf{e}_{i'_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i'_p};\ \mathbf{e}^{j'_1}, \ldots, \mathbf{e}^{j'_q}) = T(c^{i_1}_{i'_1}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, c^{i_p}_{i'_p}\mathbf{e}_{i_p};\ c^{j'_1}_{j_1}\mathbf{e}^{j_1}, \ldots, c^{j'_q}_{j_q}\mathbf{e}^{j_q}) =$$
$$= \Big[\text{в силу } (8)\Big] = c^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot c^{i_p}_{i'_p} \cdot c^{j'_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot c^{j'_q}_{j_q} \cdot\ T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$$

□

Замечание 3.1. Можно ввести понятие тензора, опираясь на понятие полилинейного функционала, как сделано, например, в [5] (Лекция 6, стр. 60).
Напомним, что полилинейным функционалом называется закон, ставящий каждому набору из m элементов некоторого линейного пространства в соответствие число и обладающий свойством линейности по каждому аргументу:

$$f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \ldots,\ (\alpha x_i^{(1)} + \beta x_i^{(2)}),\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_m\right) =$$
$$= \alpha f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \ldots,\ x_i^{(1)},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_m\right) + \beta f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \ldots,\ x_i^{(2)},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_m\right),$$
$$i = \overline{1,\ n}.$$

Если в качестве линейного пространства, на котором определён функционал взять прямую сумму $L \bigoplus L^*$, потребовать, чтобы первые p аргументов функционала брались из L, а остальные q аргументов – из L^*, то мы получим тензор типа (p, q).

Пример 3.1. Тензор типа $(0, 0)$ можно рассматривать как число. Никаких аргументов у него нет.

Пример 3.2. Тензор типа $(1, 0)$ можно рассматривать как ковектор:

$$T_i \longleftrightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \ldots \\ T_n \end{pmatrix}.$$

На произвольный вектор $\mathbf{x} \in L$ он действует так:

$$T\mathbf{x} = x^i T_i \equiv (x^1,\ \ldots,\ x^n) \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ \ldots \\ T_n \end{pmatrix} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}.$$

Таким образом, результатом действия тензора типа $(1, 0)$ на вектор $\mathbf{x}$ является число, равное скалярному произведению $\mathbf{x}$ на некоторый фиксированный ковектор.

Пример 3.3. Тензор типа $(0, 1)$ можно рассматривать как вектор:

$$T^j \longleftrightarrow \mathbf{T} = \left(T^1,\ T^2,\ \ldots,\ T^n\right).$$

На произвольный ковектор $\mathbf{y} \in L^*$ он действует так:

$$T\mathbf{y} = y_j T^j \equiv (T^1,\ \ldots,\ T^n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}.$$

Таким образом, результатом действия тензора типа $(0, 1)$ на ковектор $\mathbf{y}$ является число, равное скалярному произведению $\mathbf{y}$ на некоторый фиксированный вектор.

Пример 3.4. Тензор типа $(1,1)$ можно рассматривать как матрицу:

$$T_i^j \longleftrightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^n \\ T_2^1 & T_2^2 & \vdots & T_2^n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ T_n^1 & T_n^2 & \vdots & T_n^n \end{pmatrix}.$$

На пару вектор $\mathbf{x}$ - ковектор $\mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in L$, а $\mathbf{y} \in L^*$, он действует так:

$$T(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x^i y_j T_i^j \equiv (x^1,\ \dots,\ x^n) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}.$$

Таким образом, результатом действия тензора типа $(1,1)$ на пару вектор $\mathbf{x}$ – ковектор $\mathbf{y}$ является число, равное произведению $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$, где $\mathbf{T}$– некоторая фиксированная матрица.

4 Примеры тензоров.

Рассмотрим несколько конкретных примеров тензоров, часто используемых в математике (см. также [2] (стр. 255–257), [4] (раздел 16.5)).

Пример 4.1 (Символ Кронеккера).

1. Рассмотрим тензор типа $(1,1)$, определённый следующим образом:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

   Как всякому тензору типа $(1,1)$, ему соответствует матрица, в данном случае единичная:

$$\delta_i^j \longleftrightarrow \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   На пару вектор $\mathbf{x}$ – ковектор $\mathbf{y}$ данный тензор действует так:

$$\delta_i^j(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x^i y_j \delta_i^j = x^i y_i = (\mathbf{x},\ \mathbf{y}),$$

   ставя им в соответствие их скалярное произведение.

2. Аналогично определяется тензор типа $(2,0)$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

   Он действует уже на пару вектор-вектор:

$$\delta_{ij}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x^i y^j \delta_{ij} = (\mathbf{x},\ \mathbf{y}),$$

   ставя ей в соответствие скалярное произведение этих векторов.

3. Можно определить подобным образом и тензор типа $(0,2)$:

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Он будет действовать на пару ковектор-ковектор:

$$\delta^{ij}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x_i y_j \delta^{ij} = (\mathbf{x},\ \mathbf{y}),$$

ставя ей в соответствие скалярное произведение этих ковекторов.

4. Во всех предыдущих примерах символы Кронеккера являлись тензорами ранга 2. Но можно определить и символ Кронеккера – тензор типа (p,p):

$$\delta^{j_1\,\dots\,j_p}_{i_1\,\dots\,i_p} = \begin{cases} 1, & \text{все верхние индексы } i_1\ \dots\ i_p \text{ различны, а нижние получены из верхних чётным числом перестановок;} \\ -1, & \text{все верхние индексы } i_1\ \dots\ i_p \text{ различны, а нижние получены из верхних нечётным числом перестановок;} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Такой тензор действует на p пар ковектор-ковектор:

$$\delta^{j_1\,\dots\,j_p}_{i_1\,\dots\,i_p}(\mathbf{x}_1,\ \dots,\ \mathbf{x}_p;\ \ \mathbf{y}^1,\ \dots,\ \mathbf{y}^p) = x_1^{i_1}\ \dots\ x_p^{i_p}\ y^1_{j_1}\ \dots\ y^p_{j_p}\delta^{j_1\,\dots\,j_p}_{i_1\,\dots\,i_p}.$$

Замечание 4.1. Широко используется понятие ([5], стр. 68, [4], 16.7-1, [2] стр. 262, 272) **метрического тензора**, вида

$$g_{ik} = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k).$$

Такой тензор в случае ОНБ превращается в δ_{ik}. Этот тензор используется, в частности, при выводе формул основных операций векторного анализа в криволинейных ортогональных системах координат (см. формулу (25), стр. 23).

Пример 4.2 (Символы Леви-Чивита).

1. Символы Леви-Чивита ранга p.
Определим тензоры типа $(p,0)$ и $(0,p)$ следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1\,\dots\,i_p} = \delta^{1\,2\,\dots\,p}_{i_1\,i_2\,\dots\,i_p} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon^{j_1\,\dots\,j_p} = \delta^{j_1\,j_2\,\dots\,j_p}_{1\,2\,\dots\,p}.$$

Первый из них действует на p векторов из L, а второй – на p ковекторов из L^*.

2. Символы Леви-Чивита ранга 2.
Рассмотрим тензор типа $(2,0)$:

$$\varepsilon_{i_1\,i_2} = \delta^{1\,2}_{i_1,\,i_2} = \begin{cases} 1, & (i_1,\ i_2) \in \{(1,\ 2)\}\,; \\ -1, & (i_1,\ i_2) \in \{(2,\ 1)\}\,; \\ 0, & (i_1,\ i_2) \in \{(1,\ 1);\ \ (2,\ 2)\}\,. \end{cases}$$

Ему соответствует матричное представление:

$$\varepsilon_{i_1\,i_2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{1\,1} & \varepsilon_{1\,2} \\ \varepsilon_{2\,1} & \varepsilon_{2\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выясним, как этот тензор действует на пару векторов $(x_1,\ x_2)$.

$$\varepsilon_{i_1\,i_2}(x_1,\ x_2) = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\varepsilon_{i_1\,i_2} = \begin{pmatrix} x_1^1, & x_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1\,1} & \varepsilon_{1\,2} \\ \varepsilon_{2\,1} & \varepsilon_{2\,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^1, & x_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = 0\cdot x_1^1x_2^1 + 1\cdot x_1^2x_2^2 + (-1)\cdot x_1^2x_2^1 + 0\cdot x_1^2x_2^2 =$$

$$= x_1^1x_2^2 - x_1^2x_2^2 = \det\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, символ Леви-Чивита ранга 2 ставит паре векторов из двумерного пространства число, равное определителю матрицы, составленной из координат этих векторов.

Для нас будет важным следующий частный случай – символ Леви-Чивита ранга 3:

3.

Аксиальный тензор.

Рассмотрим тензор

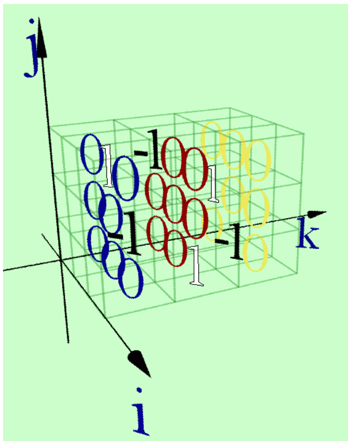
$$\varepsilon_{ijk} = \delta_{ijk}^{123} = \begin{cases} 1, & (i,\ j,\ k) \in \{(1,\ 2,\ 3);\ \ (2,\ 3,\ 1);\ \ (3,\ 1,\ 2)\}\,; \\ -1, & (i,\ j,\ k) \in \{(1,\ 3,\ 2);\ \ (2,\ 1,\ 3);\ \ (3,\ 2,\ 1)\}\,; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{10}$$

Легко заметить, что в случае 3-мерного пространства L численно (ijk)-я компонента данного тензора равна смешанному поизведению базисных векторов:

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1, & (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k)\ \text{образуют правую тройку;} \\ -1, & (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k)\ \text{образуют левую тройку;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

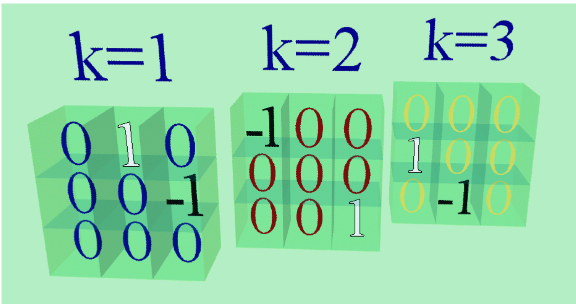
Этот тензор называется **аксиальным** по той причине, что при смене ориентации базиса (с левого на правый и наоборот) значение тензора меняет знак. Аналогично тому, как тензоры ранга 1 можно изобразить в виде столбца или строки n чисел, а тензоры ранга 2 – в виде матрицы $n \times n$, аксиальный тензор можно изобразить в виде трёхмерного массива:

ε_{ijk}



или, по слоям:

ε_{ij1} ε_{ij2} ε_{ij3}



4. Совершенно аналогично вводится аксиальй тензор на пространстве L^*:

$$\varepsilon^{ijk} = \delta^{ijk}_{123} = \begin{cases} 1, & (i,\ j,\ k) \in \{(1,\ 2,\ 3);\ \ (2,\ 3,\ 1);\ \ (3,\ 1,\ 2)\}\,; \\ -1, & (i,\ j,\ k) \in \{(1,\ 3,\ 2);\ \ (2,\ 1,\ 3);\ \ (3,\ 2,\ 1)\}\,; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Свойства аксиального тензора.

Утверждение 4.1.

1.
$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\,\varepsilon_{ikj} = -\,\varepsilon_{kji} = -\,\varepsilon_{jik};$$

2.
$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l. \tag{11}$$

Доказательство.
1) Первый пункт утверждения следует сразу из определения аксиального тензора равенством (10).
2) Истинность второго пункта устанавливается элементарной проверкой. С одной стороны,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \varepsilon^{ij1}\varepsilon_{lm1} + \varepsilon^{ij2}\varepsilon_{lm2} + \varepsilon^{ij3}\varepsilon_{lm3} = \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{тройки } (ij1) \text{ и } (lm1)\text{одинаково ориентированы} \\ -1 & \text{тройки } (ij1) \text{ и } (lm1)\text{противоположно ориентированы} \\ 0 & \text{в тройке } (ij1) \text{ или } (lm1)\text{есть одинаковые числа} \end{array} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{тройки } (ij2) \text{ и } (lm2)\text{одинаково ориентированы} \\ -1 & \text{тройки } (ij2) \text{ и } (lm2)\text{противоположно ориентированы} \\ 0 & \text{в тройке } (ij2) \text{ или } (lm2)\text{есть одинаковые числа} \end{array} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{тройки } (ij3) \text{ и } (lm3)\text{одинаково ориентированы} \\ -1 & \text{тройки } (ij3) \text{ и } (lm3)\text{противоположно ориентированы} \\ 0 & \text{в тройке } (ij3) \text{ или } (lm3)\text{есть одинаковые числа} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{в случае, когда } i = l,\ j = m,\ i \neq j,\ l \neq m; \\ -1 & \text{в случае, когда } i = m,\ j = l,\ i \neq j,\ l \neq m; \\ 0 & \text{в случае, когда } i = j, \text{ или } l = m, \text{ или } \{i,j\} \neq \{l,m\}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{в случае, когда } i = l,\ j = m,\ i \neq j,\ l \neq m; \\ -1 & \text{в случае, когда } i = m,\ j = l,\ i \neq j,\ l \neq m; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{array} \right.$$

□

5 Алгебраические операции с тензорами.

Опр. 5.1. (см. также [4], 16.3, [2] стр. 257 – 262)

1. **Суммой** двух тензоров типа (p, q) называется **тензор** типа (p, q), равный:
$$(T+S)^{j_1\,\dots\,j_q}_{i_1\,\dots\,i_p} = T^{j_1\,\dots\,j_q}_{i_1\,\dots\,i_p} + S^{j_1\,\dots\,j_q}_{i_1\,\dots\,i_p}.$$
2. **Произведением (внешним)** тензоров типа (p, q) и (r, s) называется **тензор** типа $(p+r, q+s)$, равный:
$$(T\otimes S)^{j_1\,\dots\,j_{q+s}}_{i_1\,\dots\,i_{p+r}} = T^{j_1\,\dots\,j_q}_{i_1\,\dots\,i_p} \cdot S^{j_{q+1}\,\dots\,j_{q+s}}_{i_{p+1}\,\dots\,i_{p+r}}.$$
3. **Свёрткой тензора T типа (p, q) по $k-$му нижнему и $r-$му верхнему индексам** называется **тензор** типа $(p-1, q-1)$, равный:
$$S^{j_1\,\dots\,j_{q-1}}_{i_1\,\dots\,i_{p-1}} = T^{j_1\,\dots\,j_{r-1}\,m\,j_r\,\dots\,j_q}_{i_1\,\dots\,i_{k-1}\,m\,i_k\,\dots\,i_p}.$$

5.1 Задачи.

Пусть в 3-мерном пространстве L заданы базисы:
$$\{\mathbf{e}\} = \{(100),\ (010),\ (001)\}$$
$$\{\mathbf{e}\} = \{(010),\ (001),\ (110)\}\,.$$

Задача 1. Найти компоненты тензора $T_i(\mathbf{e}) = i$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Решение. Прежде всего заметим, что данный тензор типа $(1, 0)$ можно представлять как ковектор, на который умножается любой вектор из L. В такой интерпретации его можно изобразить так:
$$T_i = i \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В соответствии с формулами для матриц перехода (2) – (4), имеем:
$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} (0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \\ (1 & 1 & 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:
$$C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В нашем случае тензор T_i действует только на один вектор из L и ни на один ковектор из L^*. Поэтому матрицы перехода сопряжённых базисов нам не понадобятся. Мы уже можем применить тензорный закон преобразования координат (9), который в нашем случае примет вид:
$$T_{i'} = c^i_{i'} \cdot T_i.$$

Перепишем его в матричной форме, учитывая (12) и (13):

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} T_{1'} \\ T_{2'} \\ T_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 5.1. Как мы видим, при переходе от $\{\mathbf{e}\}$ к $\{\mathbf{e}'\}$ компоненты ковектора $\mathbf{T}$, соответствующего нашему тензору, вычисляются по закону

$$\mathbf{T}' = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \cdot \mathbf{T},$$

в отличие от закона, по которому меняются координаты вектора $\mathbf{x} \in L$ при том же переходе:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot C^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}.$$

Именно это "несоответствие" этих двух законов приводит к корректности определение тензора, ведь очевидно, что при корректном определении действие тензора на вектор $\mathbf{x}$ должно давать один и тот же результат в любом базисе. Убедимся, что это так: подействуем на вектор $\mathbf{x}$ тензором T в базисах $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}'\}$:

$$\mathbf{x}'\mathbf{T}' = \mathbf{x} \cdot C^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \cdot C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}\mathbf{T} \equiv \mathbf{x}\mathbf{T}.$$

Задача 2. Найти компоненты тензора $T^j(\mathbf{e}^*) = j$ в базисе $\{\mathbf{e}'^*\}$.

Решение. В первую очередь найдём матрицы перехода от $\{\mathbf{e}^*\}$ к $\{\mathbf{e}'^*\}$ и обратно.
В силу определения 1.2, базис $\{\mathbf{e}^*\}$ имеет вид:

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (6) и (7), получаем:

$$C_{\mathbf{e}'^*\to\mathbf{e}^*} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \left(c^i_{i'}\right) = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} = C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = \left(c^{j'}_j\right) = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & c^{1'}_2 & c^{1'}_3 \\ c^{2'}_1 & c^{2'}_2 & c^{2'}_3 \\ c^{3'}_1 & c^{3'}_2 & c^{3'}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Далее, поскольку данный тензор типа $(0,1)$ можно представлять как вектор, на который умножается любой ковектор из L^*, его можно изобразить так:

$$T^j = j \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{T} = \left(T^1,\, T^2,\, T^3\right) = (1\ 2\ 3). \tag{16}$$

В нашем случае тензор T^j действует только на один ковектор из L^* и ни на один вектор из L. Поэтому тензорный закон преобразования координат (9) в нашем случае примет вид:

$$T^{j'} = c^{j'}_j \cdot T^j.$$

Перепишем его в матричной форме, учитывая (16) и (15):

$$\mathbf{T}' = \left(T^{1'},\, T^{2'},\, T^{3'}\right) = \left(T^1,\, T^2,\, T^3\right) \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & c^{1'}_2 & c^{1'}_3 \\ c^{2'}_1 & c^{2'}_2 & c^{2'}_3 \\ c^{3'}_1 & c^{3'}_2 & c^{3'}_3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 1).$$

Задача 3. Найти компоненты тензора T_i^j в базисе $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}*\}$ определённого равенством $T_i^j = i + j$, в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ и $\{\mathbf{e}'^*\}$.

Решение. Матрицы перехода от $\{\mathbf{e}^*\}$ к $\{\mathbf{e}'^*\}$ и обратно мы нашли, решая задачу 2.

$$C_{\mathbf{e}'^*\to\mathbf{e}^*} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \left(c_{i'}^i\right) = \begin{pmatrix} c_{1'}^1 & c_{1'}^2 & c_{1'}^3 \\ c_{2'}^1 & c_{2'}^2 & c_{2'}^3 \\ c_{3'}^1 & c_{3'}^2 & c_{3'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} = C_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = \left(c_j^{j'}\right) = \begin{pmatrix} c_1^{1'} & c_2^{1'} & c_3^{1'} \\ c_1^{2'} & c_2^{2'} & c_3^{2'} \\ c_1^{3'} & c_2^{3'} & c_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Поскольку данный тензор типа $(1,1)$ можно представлять как матрицу, на которую умножается любой вектор из L и ковектор из L^*, его можно изобразить так:

$$T_i^j = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & T_1^3 \\ T_2^1 & T_2^2 & T_2^3 \\ T_3^1 & T_3^2 & T_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В нашем случае тензор T_i^j действует только на один вектор из L и один ковектор из L^*. Поэтому тензорный закон преобразования координат (9) в нашем случае примет вид:

$$T_{i'}^{j'} = c_{i'}^i \cdot c_j^{j'} \cdot T_i^j.$$

Перепишем его в матричной форме, учитывая (17) и (15):

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} T_{1'}^{1'} & T_{1'}^{2'} & T_{1'}^{3'} \\ T_{2'}^{1'} & T_{2'}^{2'} & T_{2'}^{3'} \\ T_{3'}^{1'} & T_{3'}^{2'} & T_{3'}^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1'}^1 & c_{1'}^2 & c_{1'}^3 \\ c_{2'}^1 & c_{2'}^2 & c_{2'}^3 \\ c_{3'}^1 & c_{3'}^2 & c_{3'}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & T_1^3 \\ T_2^1 & T_2^2 & T_2^3 \\ T_3^1 & T_3^2 & T_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{1'} & c_2^{1'} & c_3^{1'} \\ c_1^{2'} & c_2^{2'} & c_3^{2'} \\ c_1^{3'} & c_2^{3'} & c_3^{3'} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 5.2. Как мы видим, при переходе от $\{\mathbf{e}\}$ к $\{\mathbf{e}'\}$ компоненты матрицы $\mathbf{T}$, соответствующей нашему тензору, вычисляются по закону

$$\mathbf{T}' = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \cdot \mathbf{T} \cdot C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*} = \left(c_{i'}^i\right) \cdot \mathbf{T} \cdot \left(c_j^{j'}\right).$$

При этом координаты вектора $\mathbf{x} \in L$ и ковектора $\mathbf{y} \in L^*$ при том же переходе меняются так:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}^{-1}, \qquad \mathbf{y}' = C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*}^{-1}\mathbf{y}.$$

Убедимся, что действие тензора на пару вектор-ковектор $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ даёт один и тот же результат в обоих базисах:

$$\mathbf{x}'\mathbf{T}'\mathbf{y}' = \mathbf{x} \cdot C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'}^{-1} \cdot \left[C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \cdot \mathbf{T} \cdot C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*}\right] \cdot C_{\mathbf{e}^*\to\mathbf{e}'^*}^{-1}\mathbf{y} \equiv \mathbf{xTy}.$$

Задача 4. **а)** Найти свёртку тензора T_{mpq}^{ij} по индексам p и j. **б)** Найти свёртку тензора T_{jp}^i по индексам j и i.

Решение. **а)** По определению свёртки (стр. 10), получаем:

$$S_{mq}^i = T_{m\mathrm{k}q}^{i\mathrm{k}}.$$

б) По определению свёртки:

$$S_p = T^{\mathrm{k}}_{\mathrm{k}p}.$$

Задача 5. Найти координаты свёртки тензора $T^j_{im} = i + j + m$ по индексам i и j в базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Решение. По определению свёртки (стр. 10), получаем:

$$S_m = T^{\mathrm{k}}_{\mathrm{k}m} = T^1_{1m} + T^2_{2m} + T^3_{3m} = (1+1+m) + (2+2+m) + (3+3+m) = 12 + 3m.$$

Этому тензору соответствует ковектор

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Аналогично решению задачи 1, компоненты тензора в новом базисе:

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} S_{1'} \\ S_{2'} \\ S_{3'} \end{pmatrix} = C_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найти полную свёртку тензора $T^{jl}_{im} = i + m - j - l$.

Решение. Сначала найдём свёртку по i и j:

$$S^l_m = T^{\mathrm{k}l}_{\mathrm{k}m} = T^{1l}_{1m} + T^{2l}_{2m} + T^{3l}_{3m} = (1 + m - 1 - l) + (2 + m - 2 - l) + (3 + m - 3 - l) = 3m - 3l.$$

Теперь свернём полученный тензор S^l_m по m и l:

$$U = S^{\mathrm{k}}_{\mathrm{k}} = S^1_1 + S^2_2 + S^3_3 = (3-3) + (6-6) + (9-9) = 0.$$

Задача 7. Найти произведение тензоров $T_i = i^2$ и $S^j = j + 1$.

Решение. По определению произведения тензоров (стр. 10):

$$U^j_i = (T \otimes S)^j_i = T_i \cdot S^j = i^2(j+1).$$

Заметим, что для этих тензоров справедливы представления (если они действуют в трёхмерном пространстве):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S} = \{2,\ 3,\ 4\}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} (1^2\cdot 2) & (1^2\cdot 3) & (1^2\cdot 4) \\ (2^2\cdot 2) & (2^2\cdot 3) & (2^2\cdot 4) \\ (3^2\cdot 2) & (3^2\cdot 3) & (3^2\cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 12 & 16 \\ 18 & 27 & 36 \end{pmatrix}.$$

6 Аксиальный тензор и набла.

В этом пункте мы будем пользоваться обозначениями Эйнштейна в следующем модифицированном виде:

Опр. 6.1.
Принимаются следующие соглашения:

1. Суммирование ведётся по каждому индексу, встречающемуся 2 раза.
2. Все индексы принимают натуральные значения от 1 до n ($n-$ размерность пространств L и L^*).
3. В выражениях вида $\frac{\partial^2 a^i}{(\partial x^j)^2}$ индекс j считаются встречающимся дважды, и по нему производится суммирование.

Пусть задано трёхмерное пространства L, с ортонормированным базисом:

$$\mathbf{e}_1 = \left\{e_1^1,\ e_1^2,\ e_1^3\right\}, \quad \mathbf{e}_1 = \left\{e_2^1,\ e_2^2,\ e_2^3\right\}, \quad \mathbf{e}_1 = \left\{e_3^1,\ e_3^2,\ e_3^3\right\}.$$

Будем также всюду в этом пункте, если не оговорено противное, считать $\vec{a} = \{a^1,\ a^2,\ a^3\} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\vec{b} = \{b^1,\ b^2,\ b^3\} = b^i\mathbf{e}_i$ – произвольными переменными векторами, каждая компонента которых есть функция от всех трёх переменных $(x^1,\ x^2,\ x^3)$), а $\vec{c} = \{c^1,\ c^2,\ c^3\} = c^i\mathbf{e}_i$ и $\vec{h} = \{h^1,\ h^2,\ h^3\} = h^i\mathbf{e}_i$ – произвольными постоянными векторами (каждая компонента вектора есть константа).

$u = u\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $v = v\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$ – выражения, которыми мы будем обозначать скалярные функции в L.

Вспомним выражение аксиального тензора ε_{ijk} через вектора базиса (стр. 8):

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k) \equiv (\mathbf{e}_i,\ [\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k]) \equiv ([\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j],\ \mathbf{e}_k) \tag{18}$$

Также нам понадобятся свойства аксиального тензора, доказанные в Утверждении 4.1 (стр. 9):

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\,\varepsilon_{ikj} = -\,\varepsilon_{kji} = -\,\varepsilon_{jik}; \tag{19}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{20}$$

(В равенстве (20), в отличие от (11), все индексы – нижние, в соответствии с принятыми в этом пункте изменёнными обозначениями Эйнштейна.)

6.1 Базовые формулы.

Приведём выражения для основных операций векторного анализа с использованием обозначений Эйнштейна (в модифицированном виде) и, где это уместно, аксиального тензора.

Операция	Через ∇	В обозначениях А.Эйнштейна
$\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) =$	$\dots$	$= a^i b^i$
$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^i =$	$\dots$	$= a^j b^k \cdot \varepsilon_{ijk}$
$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,) =$	$\dots$	$= a^i b^j c^k \cdot \varepsilon_{ijk}$
$(\operatorname{grad} u)^i =$	$\nabla^i\ u$	$= \frac{\partial u}{\partial x^i}$
$\Delta u =$	$(\nabla,\ \nabla u)$	$= \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2}$
$(\Delta\vec{a})^i =$	$(\nabla)^2\ a^i$	$= \frac{\partial^2 a^i}{(\partial x^i)^2}$
$\operatorname{div}\vec{a} =$	$(\nabla,\ \vec{a})$	$= \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$
$(\vec{a},\ \nabla) =$	$(\vec{a},\ \nabla)$	$= a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
$(\operatorname{rot}\vec{a})^i =$	$[\nabla,\ \vec{a}]^i$	$= \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \cdot \varepsilon_{ijk}$
$(\operatorname{grad}\ (\operatorname{div}\vec{a}))^i =$	$\nabla^i\ (\nabla,\ \vec{a})$	$= \frac{\partial^2 a^j}{\partial x^i \partial x^j}$

Доказательство. Формулы для $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, $(\operatorname{grad} u)^i$, Δu, $(\Delta\vec{a})^i$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $(\vec{a},\ \nabla)$ очевидны, поскольку используют только определение данных операций и обозначения Эйнштейна. Единственное, что надо прокомментировать, так это, что

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u,$$

поскольку

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} \equiv \Delta u.$$

Остановимся на выводе формул для $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^i$, $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,)$, $(\operatorname{grad}\ (\operatorname{div}\vec{a}))^i$ и $(\operatorname{rot}\vec{a})^i$.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^i = \left(\mathbf{e}_i,\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right) = \left(\mathbf{e}_i,\ a^j\mathbf{e}_j,\ b^k\mathbf{e}_k\right) = a^j b^k \left(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k\right) = a^j b^k \cdot \varepsilon_{ijk}.$$

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,) = \left(a^i\mathbf{e}_i,\ b^j\mathbf{e}_j,\ c^k\mathbf{e}_k\right) = a^i b^j c^k \left(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k\right) = a^i b^j c^k \cdot \varepsilon_{ijk}.$$

$$(\operatorname{grad}\ (\operatorname{div}\vec{a}))^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\ \frac{\partial a^j}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 a^j}{\partial x^i \partial x^j}.$$

$$(\operatorname{rot}\vec{a})^i = (\mathbf{e}_i,\ \operatorname{rot}\vec{a}) = (\mathbf{e}_i,\ \nabla,\ \vec{a}) = \left(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\frac{\partial}{\partial x^j},\ \mathbf{e}_k a^k\right) = \frac{\partial a^k}{\partial x^j}\left(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k\right) = \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \cdot \varepsilon_{ijk}.$$

$\square$

6.2 Примеры.

1. Найти: $\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right];$

2. Найти: $\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \left[\vec{c},\ \vec{h}\right]\right);$

3. Найти: $\mathrm{div}\ (u\ \vec{a});$

4. Найти: $\mathrm{rot}\ (u\vec{a});$

5. Найти: $(\vec{c},\ \nabla)\ u\vec{a};$

6. Найти: $\mathrm{div}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right];$

7. Найти: $\mathrm{rot}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right];$

8. Доказать тождество:

$$(\vec{c},\ \nabla)\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left[\vec{a},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right] - \left[\vec{b},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{a}\right];$$

9. Найти: $\left(\mathrm{rot}\,\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right);$

10. Найти: $\left[\vec{a},\ \mathrm{rot}\,\vec{b}\right];$

11. Доказать тождество:

$$\left[\vec{a},\ \mathrm{rot}\,\vec{b}\right] + \left[\vec{b},\ \mathrm{rot}\,\vec{a}\right] + (\vec{a},\ \nabla)\,\vec{b} + \left(\vec{b},\ \nabla\right)\vec{a} = \mathrm{grad}\ \left(\vec{a},\ \vec{b}\right);$$

12. Найти: $\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\,\vec{a});$

13. Найти: $\mathrm{div}\ \left((\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right);$

14. Найти: $\left(\mathrm{rot}\,\vec{a},\ \mathrm{rot}\,\vec{b}\right);$

15. Найти: $\mathrm{rot}\ \left[\vec{a},\ f(r)\vec{r}\ \right],$ где $\vec{r} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\},\quad r = |\vec{r}|;$

16. Найти: $\iint\limits_S (\vec{a},\ \vec{r}\ )\ \vec{b}\ d\vec{s},$ где $\vec{a},\ \vec{b}$– постоянные, а $\vec{r} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\};$

17. Найти: $\mathrm{rot}\,(\vec{a},\ \vec{r}\ )\left(\vec{b},\ \vec{r}\ \right)\vec{b},$ где $\vec{a},\ \vec{b}$– постоянные, а $\vec{r} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\}.$

Пример 6.1.

$$\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right]^i = \varepsilon_{ijk}\cdot a^j\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]^k = \varepsilon_{ijk}\ a^j\ \varepsilon_{klm}\ b^l c^m = \left[\ \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}\ \right] = \varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmk}\ a^j b^l c^m =$$

$$= \Bigg(\underbrace{\delta_{il}}_{i\,=\,l}\ \underbrace{\delta_{jm}}_{j\,=\,m} - \underbrace{\delta_{im}}_{i\,=\,m}\ \underbrace{\delta_{jl}}_{j\,=\,l}\Bigg)\cdot a^j b^l c^m = a^j b^i c^j - a^j b^j c^i = \left(\vec{a},\ \vec{c}\right)\ b^i - \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)\ c^i$$

Пример 6.2.

$$\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \left[\vec{c},\ \vec{h}\right]\right) = \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^i\left[\vec{c},\ \vec{h}\right]^i = \varepsilon_{ijk}\ a^j b^k\cdot\varepsilon_{ilm}\ c^l h^m = \begin{bmatrix}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki},\\ \varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{lmi}\end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{jki}\cdot\varepsilon_{lmi}\ a^j b^k\ c^l h^m = \Bigg(\underbrace{\delta_{jl}}_{j\,=\,l}\ \underbrace{\delta_{km}}_{k\,=\,m} - \underbrace{\delta_{jm}}_{j\,=\,m}\ \underbrace{\delta_{kl}}_{k\,=\,l}\Bigg)\cdot a^j b^k\ c^l h^m = a^j b^k\ c^j h^k - a^j b^k\ c^k h^j =$$

$$= a^j c^j\cdot b^k h^k - a^j h^j\cdot b^k c^k = (\vec{a},\ \vec{c}\,)\left(\vec{b},\ \vec{h}\ \right) - \left(\vec{a},\ \vec{h}\ \right)\left(\vec{b},\ \vec{c}\ \right).$$

Пример 6.3.

$$\operatorname{div}\ (u\ \vec{a}) = \frac{\partial\,(ua^i)}{\partial x^i} = a^i\ \frac{\partial u}{\partial x^i} + u\ \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = (\vec{a},\ \nabla u) + u\ \operatorname{div}\vec{a}.$$

Пример 6.4.

$$(\operatorname{rot}\ (u\vec{a}))^i\ =\ \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left(ua^k\right)}{\partial x^j}\ =\ \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\,(u)}{\partial x^j}a^k\ +\ \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left(a^k\right)}{\partial x^j}u\ =\ [\operatorname{grad} u,\ \vec{a}]^i\ +\ u\,(\operatorname{rot}\vec{a})^i\,.$$

Пример 6.5.

$$((\vec{c},\ \nabla)\ u\vec{a})^i = c^l\frac{\partial}{\partial x^l}\left(ua^i\right) = c^l a^i\frac{\partial u}{\partial x^l} + c^l u\frac{\partial a^i}{\partial x^l} = [(\vec{c},\ \operatorname{grad} u)\ \vec{a} + u\,(\vec{c},\ \nabla)\,\vec{a}]^i\,.$$

Пример 6.6.

$$\operatorname{div}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \frac{\partial\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\ \varepsilon_{ijk}\ a^j b^k = \varepsilon_{ijk}\ b^k\ \frac{\partial a^j}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk}\ a^j\ \frac{\partial b^k}{\partial x^i} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}\\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}\end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{kij}\ b^k\ \frac{\partial a^j}{\partial x^i} - \varepsilon_{jik}\ a^j\ \frac{\partial b^k}{\partial x^i} = \begin{bmatrix}\text{переименуем индексы в первом слагаемом}\ \ k\to i,\ i\to j,\ j\to k;\\ \text{переименуем индексы во втором слагаемом}\ \ i\to j,\ j\to i\end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\ b^i\ \frac{\partial a^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{ijk}\ a^i\ \frac{\partial b^k}{\partial x^j} = (\operatorname{rot}\vec{a})^i\cdot b^i - \left(\operatorname{rot}\vec{b}\right)^i\cdot a^i = \left(\vec{b},\ \operatorname{rot}\vec{a}\right) - \left(\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right).$$

Пример 6.7.

$$\left(\operatorname{rot}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right)^i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]^k}{\partial x^j} = \varepsilon_{ijk}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\ \left(\varepsilon_{klm}\ a^l b^m\right) = \left[\ \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}\ \right] = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\ \frac{\partial\left(a^l b^m\right)}{\partial x^j} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\ \left(b^m\ \frac{\partial a^l}{\partial x^j} + a^l\ \frac{\partial b^m}{\partial x^j}\right) = \Bigg(\underbrace{\delta_{il}}_{i\,=\,l}\ \underbrace{\delta_{jm}}_{j\,=\,m} - \underbrace{\delta_{im}}_{i\,=\,m}\ \underbrace{\delta_{jl}}_{j\,=\,l}\Bigg)\cdot\ \left(b^m\ \frac{\partial a^l}{\partial x^j} + a^l\ \frac{\partial b^m}{\partial x^j}\right) =$$

$$= b^j\ \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^i\ \frac{\partial b^j}{\partial x^j} - \left(b^i\ \frac{\partial a^j}{\partial x^j} + a^j\ \frac{\partial b^i}{\partial x^j}\right) = \left(\left(\vec{b},\ \nabla\right) + \operatorname{div}\vec{b}\right)\ a^i - (\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a},\ \nabla))\ b^i.$$

Пример 6.8. Доказать тождество:

$$(\vec{c},\ \nabla)\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left[\vec{a},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right] - \left[\vec{b},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{a}\right]$$

С одной стороны, $\left((\vec{c},\ \nabla)\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right)^i \ = \ c^l\,\dfrac{\partial}{\partial x^l}\left(\varepsilon_{ijk}\ a^j b^k\right) = \varepsilon_{ijk}\ c^l b^k \dfrac{\partial a^j}{\partial x^l} + \varepsilon_{ijk}\ c^l a^j \dfrac{\partial b^k}{\partial x^l}.$

С другой стороны, $\left[\vec{a},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right]^i \ = \ \varepsilon_{ijk}\ c^l a^j \dfrac{\partial b^k}{\partial x^l}$

и $\left[\vec{b},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{a}\right]^i = \varepsilon_{ijk}\ c^l b^j \dfrac{\partial a^k}{\partial x^l} = \left[\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}\ \right] =$

$$= -\varepsilon_{ikj}\ c^l b^j \frac{\partial a^k}{\partial x^l} = \left[\text{переименуем индексы } \begin{Bmatrix} j \to k, \\ k \to j \end{Bmatrix}\right] = -\varepsilon_{ijk}\ c^l b^k \frac{\partial a^j}{\partial x^l}.$$

Сравнивая результаты этих выкладок, получаем желаемое тождество.

Пример 6.9.

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = (\operatorname{rot}\vec{a})^i\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]^i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\varepsilon_{ilm}\ b^l c^m = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} \\ \varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{lmi} \end{bmatrix} = \varepsilon_{jki}\cdot\varepsilon_{lmi}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot b^l c^m =$$

$$= \Big(\underbrace{\delta_{jl}}_{j=l}\ \underbrace{\delta_{km}}_{k=m} - \underbrace{\delta_{jm}}_{j=m}\ \underbrace{\delta_{kl}}_{k=l}\Big)\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot b^l c^m = \frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot b^j c^k - \frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot b^k c^j = c^k\left(\vec{b},\ \nabla\right)\ a^k - b^k\left(\vec{c},\ \nabla\right)\ a^k =$$

$$= \left(\vec{c},\ \left(\vec{b},\ \nabla\right)\ \vec{a}\right) - \left(\vec{b},\ \left(\vec{c},\ \nabla\right)\ \vec{a}\right).$$

Пример 6.10.

$$\left[\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right]^i = \varepsilon_{ijk}\ a^j\left(\operatorname{rot}\vec{b}\right)^k = \varepsilon_{ijk}\ a^j\cdot\varepsilon_{klm}\frac{\partial b^m}{\partial x^l} = \left[\ \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}\ \right] = \varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmk}\ a^j\frac{\partial b^m}{\partial x^l} =$$

$$= \Big(\underbrace{\delta_{il}}_{i=l}\ \underbrace{\delta_{jm}}_{j=m} - \underbrace{\delta_{im}}_{i=m}\ \underbrace{\delta_{jl}}_{j=l}\Big)\cdot a^j\frac{\partial b^m}{\partial x^l} = a^j\frac{\partial b^j}{\partial x^i} - a^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j} = \left(\vec{a},\ \frac{\partial\vec{b}}{\partial x^i}\right) - (\vec{a},\ \nabla)\ b^i.$$

Пример 6.11. Доказать тождество:

$$\left[\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b},\ \operatorname{rot}\vec{a}\right] + (\vec{a},\ \nabla)\,\vec{b} + \left(\vec{b},\ \nabla\right)\vec{a} = \operatorname{grad}\ \left(\vec{a},\ \vec{b}\right).$$

$$\left(\left[\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b},\ \operatorname{rot}\vec{a}\right] + (\vec{a},\ \nabla)\,\vec{b} + \left(\vec{b},\ \nabla\right)\vec{a}\right)^i = \left[\text{в силу примера 6.10}\right] =$$

$$= \left(a^j\frac{\partial b^j}{\partial x^i} - a^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\right) + \left(b^j\frac{\partial a^j}{\partial x^i} - b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) + \left(a^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\right) + \left(b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) = \left[\text{сокращаем всё, что можно}\right] =$$

$$= a^j\frac{\partial b^j}{\partial x^i} + b^j\frac{\partial a^j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^j b^j\right) \equiv \left(\operatorname{grad}\ \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)\right)^i.$$

Пример 6.12.

$$(\operatorname{rot}\ (\operatorname{rot}\vec{a}))^i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\,(\operatorname{rot}\vec{a})}{\partial x^j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\varepsilon_{klm}\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\right) = \left[\ \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}\ \right] =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\right) = \underbrace{\delta_{il}}_{i=l}\ \underbrace{\delta_{jm}}_{j=m}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\right) - \underbrace{\delta_{im}}_{i=m}\ \underbrace{\delta_{jl}}_{j=l}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\operatorname{div}\vec{a} - \frac{\partial^2}{\left(\partial x^j\right)^2} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a})^i - (\Delta\vec{a})^i.$$

Пример 6.13.

$$\operatorname{div}\left((\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right) = \frac{\partial\left(a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\, b^i\right)}{\partial x^i} = \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + a^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^i} =$$
$$= \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + (\vec{a},\ \nabla)\left(\nabla,\ \vec{b}\right) = \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + (\vec{a},\ \nabla)\operatorname{div}\vec{b}.$$

Таким образом, мы получили формулу:

$$\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} = \left(\nabla,\ \ (\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right) - (\vec{a},\ \nabla)\left(\nabla,\ \vec{b}\right). \tag{21}$$

Разумеется, поскольку в левую часть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ входят симметричным образом, верно и равенство

$$\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} = \left(\nabla,\ \ \left(\vec{b},\ \nabla\right)\ \vec{a}\right) - \left(\vec{b},\ \nabla\right)(\nabla,\ \vec{a}).$$

Выпишем частный случай доказанной формулы, когда $\vec{a}=\vec{c}-$ постоянный:

$$\operatorname{div}\left((\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right) = (\vec{c},\ \nabla)\operatorname{div}\vec{b}.$$

Пример 6.14. Найти: $\left(\operatorname{rot}\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right)$.
Выведем сначала вспомогательное равенство:

$$\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^k}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\left(\Delta\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) - \left(\vec{a},\ \Delta\vec{b}\right) - \left(\vec{b},\ \Delta\vec{a}\right)\right). \tag{22}$$

Доказательство.

$$\Delta\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) = \frac{\partial^2\left(a^i,\ b^i\right)}{\partial x^j\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a^i\,\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + b^i\,\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) = a^i\frac{\partial^2 b^i}{\left(\partial x^j\right)^2} + 2\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^k}{\partial x^j} + b^i\frac{\partial^2 a^i}{\left(\partial x^j\right)^2} =$$
$$= \left(\vec{a},\ \Delta\vec{b}\right) + 2\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^k}{\partial x^j} + \left(\vec{b},\ \Delta\vec{a}\right).$$

□

Теперь вернёмся к выражению $\left(\operatorname{rot}\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right)$.

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{b}\right) = (\operatorname{rot}\vec{a})^i\left(\operatorname{rot}\vec{b}\right)^i = \varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\varepsilon_{ilm}\cdot\frac{\partial b^m}{\partial x^l} = \left[\begin{array}{l}\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}\\ \varepsilon_{ilm}=\varepsilon_{lmi}\end{array}\right] = \varepsilon_{jki}\cdot\varepsilon_{lmi}\,\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^m}{\partial x^l} =$$
$$= \left(\underbrace{\delta_{jl}}_{j=l}\ \underbrace{\delta_{km}}_{k=m} - \underbrace{\delta_{jm}}_{j=m}\ \underbrace{\delta_{kl}}_{k=l}\right)\cdot\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^m}{\partial x^l} = \frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^k}{\partial x^j} - \frac{\partial a^k}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial b^j}{\partial x^k} = \left[\text{в силу равенств (21) и (22)}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Delta\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) - \left(\vec{a},\ \Delta\vec{b}\right) - \left(\vec{b},\ \Delta\vec{a}\right)\right) - \left(\operatorname{div}\left((\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right) - (\vec{a},\ \nabla)\operatorname{div}\vec{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{a},\ \Delta\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{b},\ \Delta\vec{a}\right) - \operatorname{div}\left((\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right) + (\vec{a},\ \nabla)\operatorname{div}\vec{b}.$$

Пример 6.15. Пусть $\vec{r}=x^i\mathbf{e}_i$, а $r=|\vec{r}\,|=\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2}$. Пусть $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция.

$$\textbf{Найти}\qquad \operatorname{rot}\left[\vec{a},\ f(r)\vec{r}\,\right].$$

Сначала выведем вспомогательные формулы:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{div}\ \left(f(r)\vec{r}\,\right)=rf'(r)+3f(r);\\ (\vec{a},\ \nabla)\,f(r)\vec{r}=\frac{f'(r)}{r}\left(\vec{a},\ \vec{r}\,\right)\vec{r}+f(r)\vec{a}.\end{array}\right\} \tag{23}$$

Доказательство.

$$\operatorname{div}\,(f(r)\vec{r}\,) = \frac{\partial\,(f(r)\cdot x^i)}{\partial x^i} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x^i} + f(r)\frac{\partial x^i}{\partial x^i} = f'(r)\cdot\frac{x^i}{r}\cdot x^i + 3f(r) = rf'(r) + 3f(r).$$

$$((\vec{a},\ \nabla)\,f(r)\vec{r}\,)^i = a^j\frac{\partial\,(f(r)x^i)}{\partial x^j} = a^j\left(f'(r)\frac{\partial r}{\partial x^j}\cdot x^i + f(r)\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right) = a^j\left(f'(r)\frac{x^ix^j}{r} + f(r)\delta_{ij}\right) = \\ = \frac{f'(r)}{r}\,(\vec{a},\ \vec{r}\,)\,x^i + f(r)a^i.$$

□

$$\left(\operatorname{rot}\,\left[\vec{a},\ f(r)\vec{r}\right]\right)^i = \left[\text{воспользуемся формулой из Примера 6.7}\right] = \\ = ((f(r)\vec{r},\ \nabla) + \operatorname{div}\,(f(r)\vec{r}\,))\ a^i - (\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a},\ \nabla))\ f(r)x^i = \left[\text{по формулам (23)}\right] = \\ = ((f(r)\vec{r},\ \nabla) + rf'(r) + 3f(r))\ a^i - \left(\operatorname{div}\vec{a}\ f(r)x^i + \frac{f'(r)}{r}\,(\vec{a},\ \vec{r}\,)\,x^i + f(r)a^i\right).$$

Таким образом, после перегруппировки слагаемых,

$$\operatorname{rot}\,[\vec{a},\ f(r)\vec{r}] = f(r)\,(\vec{r},\ \nabla)\,\vec{a} - f(r)\vec{r}\operatorname{div}\vec{a} + 2f(r)\vec{a} + \frac{f'(r)}{r}\left(r^2\vec{a} - (\vec{a},\ \vec{r}\,)\,\vec{r}\,\right), \quad \text{или}$$

$$\operatorname{rot}\,[\vec{a},\ f(r)\vec{r}] = f(r)\left((\vec{r},\ \nabla)\,\vec{a} - \vec{r}\ (\nabla,\ \vec{a})\right) + 2f(r)\vec{a} + \frac{f'(r)}{r}\left((\vec{r},\ \vec{r}\,)\,\vec{a} - (\vec{a},\ \vec{r}\,)\,\vec{r}\,\right).$$

Пример 6.16. Пусть S– гладкая замкнутая поверхность с нормалью $\vec{n}$, ограничивающая тело V. Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные, а $\vec{r} = x^i\mathbf{e}_i$.

$$\iint\limits_S (\vec{a},\ \vec{r}\,)\ \vec{b}\ d\vec{s} = \iint\limits_S (\vec{a},\ \vec{r}\,)\ \left(\vec{b},\ \vec{n}\,\right) ds = \iint\limits_S \left((\vec{a},\ \vec{r}\,)\,\vec{b},\ \vec{n}\,\right) ds =$$

$$\left[\text{по формуле Гаусса – Остроградского}\right] = \iiint\limits_V \left(\nabla,\ (\vec{a},\ \vec{r}\,)\,\vec{b}\,\right) dv = \iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial x^i}\,(a^jx^jb^i)\ dv = \\ = \iiint\limits_V \left(x^jb^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i} + a^jb^i\frac{\partial x^j}{\partial x^i} + a^jx^j\frac{\partial b^i}{\partial x^i}\right) dv = \left[\vec{a}\text{ и }\vec{b} - \text{постоянны}\right] = \iiint\limits_V\ a^jb^i\delta_{ij}\ dv = \\ = \iiint\limits_V\ a^ib^i\ dv = \iiint\limits_V \left(\vec{a},\ \vec{b}\right) dv = \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)\cdot V.$$

Пример 6.17. Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные, а $\vec{r} = x^i \mathbf{e}_i$.

$$\textbf{Найти} \qquad \text{rot}\ (\vec{a},\ \vec{r}\,) \left(\vec{b},\ \vec{r}\,\right) \vec{b}.$$

$$\left(\text{rot}\ (\vec{a},\ \vec{r}\,) \left(\vec{b},\ \vec{r}\,\right) \vec{b}\,\right)^i = \Big[\text{по формуле из Примера 6.4}\Big] =$$
$$= \left[\text{grad}\ (\vec{a},\ \vec{r}\,) \left(\vec{b},\ \vec{r}\,\right),\ \vec{b}\,\right]^i + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \left(a^l x^l b^m x^m\right)}{\partial x^j}\ b^k + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i =$$
$$= \varepsilon_{ijk}\ b^k \left(\frac{\partial a^l}{\partial x^j} b^m x^l x^m + \frac{\partial x^l}{\partial x^j} a^l b^m x^m + \frac{\partial b^m}{\partial x^j} a^l x^l x^m + \frac{\partial x^m}{\partial x^j} a^l b^m x^l\right) + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i =$$
$$= \Big[\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ – постоянны}\Big] = \varepsilon_{ijk}\ b^k \left(\delta_{lj} a^l b^m x^m + \delta_{mj} a^l b^m x^l\right) + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i =$$
$$= \varepsilon_{ijk}\ b^k \left(a^j b^m x^m + a^l b^j x^l\right) + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i = b^m x^m \cdot \varepsilon_{ijk}\ a^j b^k + a^l x^l \cdot \varepsilon_{ijk}\ b^j b^k + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i =$$
$$= \left(\vec{b},\ \vec{r}\,\right) \left[\vec{a},\ \vec{b}\,\right]^i + (\vec{a},\ \vec{r}\,) \underbrace{\left[\vec{b},\ \vec{b}\,\right]^i}_{\substack{\parallel \\ 0}} + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i = \left(\vec{b},\ \vec{r}\,\right) \left[\vec{a},\ \vec{b}\,\right]^i + u\ (\text{rot}\ \vec{a})^i.$$

Таким образом, мы доказали формулы:

1. $\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right] = \left(\vec{a},\ \vec{c}\,\right) \vec{b} - \left(\vec{a},\ \vec{b}\right) \vec{c};$
2. $\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \left[\vec{c},\ \vec{h}\right]\right) = (\vec{a},\ \vec{c}\,) \left(\vec{b},\ \vec{h}\,\right) - \left(\vec{a},\ \vec{h}\,\right) \left(\vec{b},\ \vec{c}\,\right);$
3. $\text{div}\ (u\,\vec{a}) = (\vec{a},\ \nabla u) + u\, \text{div}\, \vec{a};$
4. $\text{rot}\ (u\vec{a}) = [\text{grad}\, u,\ \vec{a}] + u\, \text{rot}\, \vec{a};$
5. $(\vec{c},\ \nabla)\ u\vec{a} = (\vec{c},\ \text{grad}\, u)\ \vec{a} + u\, (\vec{c},\ \nabla)\, \vec{a};$
6. $\text{div}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left(\vec{b},\ \text{rot}\, \vec{a}\right) - \left(\vec{a},\ \text{rot}\, \vec{b}\right);$
7. $\text{rot}\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left(\left(\vec{b},\ \nabla\right) + \left(\nabla,\ \vec{b}\right)\right) \vec{a} - \left(\left(\vec{a},\ \nabla\right) + \left(\nabla,\ \vec{a}\,\right)\right) \vec{b};$
8. $(\vec{c},\ \nabla) \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left[\vec{a},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right] - \left[\vec{b},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{a}\right];$
9. $\left(\text{rot}\, \vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = \left(\vec{c},\ \left(\vec{b},\ \nabla\right) \vec{a}\right) - \left(\vec{b},\ (\vec{c},\ \nabla)\ \vec{a}\right);$
10. $\text{grad}\ \left(\vec{a},\ \vec{b}\right) = \left[\vec{a},\ \text{rot}\, \vec{b}\right] + \left[\vec{b},\ \text{rot}\, \vec{a}\right] + (\vec{a},\ \nabla)\, \vec{b} + \left(\vec{b},\ \nabla\right) \vec{a};$
11. $\text{rot}\ (\text{rot}\, \vec{a}) = \text{grad}\, \text{div}\, \vec{a} - \Delta \vec{a};$
12. $\text{div}\ \left((\vec{c},\ \nabla)\ \vec{b}\right) = (\vec{c},\ \nabla)\, \text{div}\, \vec{b};$
13. $\left(\text{rot}\, \vec{a},\ \text{rot}\, \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\Delta \left(\vec{a},\ \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{a},\ \Delta\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{b},\ \Delta\vec{a}\right) - \text{div}\left((\vec{a},\ \nabla)\ \vec{b}\right) + (\vec{a},\ \nabla)\, \text{div}\vec{b}.$

Интересно сравнить формулы 1), 7) и 11), поскольку rot $\vec{a}$ можно символически записать как $[\nabla,\ \vec{a}]$, и эти три тождества являются разными только на первый взгляд. И вывод их отличается только в деталях.

Формулы 2) и 9) также имеют общую структуру и одинаковый путь доказательства.

Замечание 6.1. Доказанные формулы можно рассматривать как правила действий с оператором "набла":
формулы 3) – 5) показывают, как набла действует на произведение скалярной и векторной функций $u\vec{a}$;
формулы 6) – 8) показывают, как набла действует на векторное произведение $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$;
формула 10) показывает, как набла действует на скалярное произведение $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$;
формулы 11) – 12) являются примерами повторного действия оператора набла.

7 Набла в криволинейных координатах.

7.1 Криволинейные координаты.

[1] (Гл. 6, §7), [4] (разделы 6.1–6.3), [3] (стр. 144–148).

Пусть в трёхмерном Евклидовом пространстве заданы 2 системы координат:

Декартова $(x) = (x^1,\ x^2,\ x^3)$ **с ОНБ**

$$\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\} \qquad \textbf{и}$$

Криволинейная $(\xi) = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ **с ОНБ**

$$\{\mathbf{e}_\xi\} = \{\mathbf{e}_{\xi_1},\ \mathbf{e}_{\xi_2},\ \mathbf{e}_{\xi_3}\},$$

причём эти две системы координат связаны равенствами:

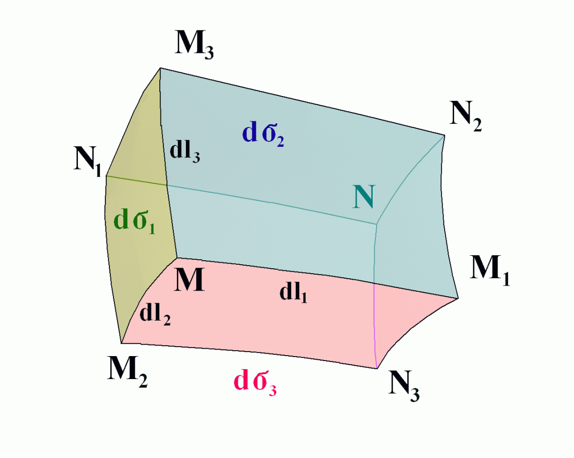
$$\begin{cases} x^1 = x^1\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right) \\ x^2 = x^2\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right) \\ x^3 = x^3\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right). \end{cases} \tag{24}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функции $x^i\left(\xi\right),\quad i = 1, 2, 3,$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов, а также, что в области, где будут происходить все рассмотрения якобиан

$$\frac{D\left(x^1,\ x^2,\ x^3\right)}{D\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)} \neq 0.$$

Заметим также, что поскольку вторая система координат – криволинейная, то векторы $\{\mathbf{e}_{\xi_1},\ \mathbf{e}_{\xi_2},\ \mathbf{e}_{\xi_3}\}$ в разных точках, вообще говоря, разные. Мы всегда будем полагать, что в каждой точке вектор $\mathbf{e}_{\xi_1}$ направлен вдоль касательной к линии $\xi_2 = \xi_3 = const$, вектор $\mathbf{e}_{\xi_2}$ направлен вдоль касательной к линии $\xi_1 = \xi_3 = const$, а вектор $\mathbf{e}_{\xi_3}$ направлен вдоль касательной к линии $\xi_1 = \xi_2 = const$. Кроме того, раз этот базис – ортонормированный, то

$$\left(\mathbf{e}_{\xi_i},\ \mathbf{e}_{\xi_j}\right) = \delta_{ij}.$$



Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с вершиной в точке $M\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)$ и рёбрами вдоль координатных линий системы координат (ξ). Пусть его вершины имеют координаты:

$$M\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right), \qquad M_1\left(\xi_1+d\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right),$$
$$M_2\left(\xi_1,\ \xi_2+d\xi_2,\ \xi_3\right), \quad M_3\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3+d\xi_3\right);$$

$$N\left(\xi_1+d\xi_1,\ \xi_2+d\xi_2,\ \xi_3+d\xi_3\right),$$
$$N_1\left(\xi_1,\ \xi_2+d\xi_2,\ \xi_3+d\xi_3\right),$$
$$N_2\left(\xi_1+d\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3+d\xi_3\right),$$
$$N_3\left(\xi_1+d\xi_1,\ \xi_2+d\xi_2,\ \xi_3\right).$$

Очень важно заметить, что при этом расстояния между вершинами этого прямоугольного параллелепипеда определяются не по аналогии с декартовыми координатами (то есть равенство $|M_1M_2| = d\xi_1$ не обязательно выполнено, как пример легко себе представить, $\xi_1 = \varphi$ – полярный угол, и тогда очевидно, что одно и тоже приращение $d\xi_1 = d\varphi$ будет вызывать различные приращения отрезков вдоль координатной кривой, в зависимости от того, насколько данный отрезок удалён от начала координат). Для корректного нахождения длин рёбер $MM_1N_2M_3M_2N_3NN_1$ надо воспользоваться теоремой Пифагора, наример:

$$|MM_1| = dl_1 = \sqrt{\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2+\left(dx^3\right)^2} =$$
$$= \left[\text{так как вдоль } MM_1 \quad x^i = x^i\left(\xi_1,\ const,\ const\right), \text{ то } \ dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi_1}\cdot d\xi_1\right] =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^3}{\partial \xi_1}\right)^2}\cdot d\xi_1.$$

Введём обозначение:

$$g_{ik} = \frac{\partial x^1}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial \xi_k}+\frac{\partial x^2}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial \xi_k}+\frac{\partial x^3}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial \xi_k}. \tag{25}$$

Тогда длину $|MM_1|$ и, аналогично, длины $|MM_2|$ и $|MM_3|$ можно записать в виде:

$$|MM_1| = dl_1 = \sqrt{g_{11}}\cdot d\xi_1, \qquad |MM_2| = dl_2 = \sqrt{g_{22}}\cdot d\xi_2, \qquad |MM_3| = dl_3 = \sqrt{g_{33}}\cdot d\xi_3. \tag{26}$$

Опр. 7.1. Числа

$$H_i = \sqrt{g_{ii}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

называются **параметрами Ламэ** или масштабными множителями.

Утверждение 7.1.

Усл. *Базисы* $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ *и* $\{\mathbf{e}_\xi\} = \{\mathbf{e}_{\xi_1},\ \mathbf{e}_{\xi_2},\ \mathbf{e}_{\xi_3}\}$ *– ортонормированные.*
Числа g_{ik} *определены соотношением* (25).

Утв. *1. Площади граней* $d\sigma_1,\ d\sigma_2,\ d\sigma_3$ *параллелепипеда* $MM_1N_2M_3M_2N_3NN_1$*:*

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= S_{MM_2N_1M_3} = \sqrt{g_{22}\ g_{33}} \cdot d\xi_2\ d\xi_3; \\ d\sigma_2 &= S_{MM_1N_2M_3} = \sqrt{g_{11}\ g_{33}} \cdot d\xi_1\ d\xi_3; \\ d\sigma_3 &= S_{MM_1N_3M_2} = \sqrt{g_{11}\ g_{22}} \cdot d\xi_1\ d\xi_2. \end{aligned}$$

2. Объём dV *параллелепипеда* $MM_1N_2M_3M_2N_3NN_1$*:*

$$dV = \sqrt{g_{11}\ g_{22}\ g_{33}} \cdot d\xi_1\ d\xi_2\ d\xi_3 = \sqrt{g} \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3.$$

3. Базисные вектора связаны соотношениями:

$$\mathbf{e}_{\xi_i} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}\ \mathbf{e}_j. \tag{27}$$

4. Справедливо равенство

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}\ g_{22}\ g_{33}} = \left| \frac{D\left(x^1,\ x^2,\ x^3\right)}{D\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)} \right|. \tag{28}$$

Доказательство.
Пункты **1)** и **2)** следуют из равенств (26) и того факта, что рассматриваемая система криволинейных координат является ортогональной, из чего следует, что параллелепипед на рисунке (стр. 23) является прямоугольным.
3) Этот пункт также следует из равенств (26). Кроме того его можно обосновать так: По свойству дифференциала функции трёх переменных:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x^i}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x^i}{\partial \xi_3} d\xi_3,$$

что можно записать в маричном виде:

$$\begin{aligned} dx^1\mathbf{e}_1 + dx^2\mathbf{e}_2 + dx^3\mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_1} \end{pmatrix} d\xi_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} d\xi_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} d\xi_3 = d\xi_1\mathbf{a}_{\xi_1} + d\xi_2\mathbf{a}_{\xi_2} + d\xi_3\mathbf{a}_{\xi_3} = \\ &= \left|\mathbf{a}_{\xi_1}\right|\ d\xi_1\mathbf{e}_{\xi_1} + \left|\mathbf{a}_{\xi_2}\right|\ d\xi_2\mathbf{e}_{\xi_2} + \left|\mathbf{a}_{\xi_3}\right|\ d\xi_3\mathbf{e}_{\xi_3}. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$\mathbf{a}_{\xi_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_i} \end{pmatrix} \tag{30}$$

– векторы вдоль осей криволинейной системы длины

$$|\mathbf{a}_{\xi_i}| = \sqrt{\frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 x^2}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 x^3}{\partial \xi_i^2}} = \sqrt{g_{ii}},$$

откуда единичные векторы вдоль тех же осей равны:

$$\mathbf{e}_{\xi_i} = \frac{\mathbf{a}_{\xi_i}}{|\mathbf{a}_{\xi_i}|} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi_i}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \xi_i}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \xi_i}\mathbf{e}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}\mathbf{e}_j.$$

4) Требуемое равенство получается из очевидных геометрических соображений: поскольку модуль смешанного произведения трёх векторов равен объёму построенного на них параллелепипеда, то в силу определения (30) векторов $\mathbf{a}_{\xi_i}$ и пункта 2) данного утверждения,

$$\left|\frac{D(x^1,\ x^2,\ x^3)}{D(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)}\right| \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 =$$

$$= \left|(\mathbf{a}_{\xi_1},\ \mathbf{a}_{\xi_2},\ \mathbf{a}_{\xi_3})\right| \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = dV = \sqrt{g} \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3. \quad (31)$$

□

7.2 Инвариантные определения градиента, дивергенции и ротора.

Прежде чем пытаться записать выражения для градиента, дивергенции и ротора в криволинейной системе координат, надо ввести их инвариантные относительно системы координат определения, то есть определения, которые не зависят от того, в какой именно ортогональной системе координат проводятся рассуждения.

Введём обозначения:

V_δ – тело, содержащее точку $\overset{0}{M}\left(\overset{0}{\xi}_1,\ \overset{0}{\xi}_2,\ \overset{0}{\xi}_3\right)$, а

$S_\delta = \partial V_\delta$ – граница этого тела с нормалью $\vec{n}$, причём

$\delta = \rho\left(\overset{0}{M},\ S_\delta\right)$ – расстояние от $\overset{0}{M}$ до S_δ.

Введём также вектор $\vec{a}$ с координатами $(a_{\xi_1},\ a_{\xi_2},\ a_{\xi_3})$ в базисе $\{\mathbf{e}_\xi\}$.

Опр. 7.2. **Вектор**, компоненты которого в системе координат $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ определяются формулой

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{S_\delta} u(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\,\vec{n}ds}{\int\limits_{V_\delta} dv} \quad (32)$$

мы будем называть **градиентом скалярного поля** $u(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$.

Опр. **7.3.** **Число**, определяемое формулой

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla,\ \vec{a}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{S_\delta} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds}{\int\limits_{V_\delta} dv} \tag{33}$$

мы будем называть **дивергенцией векторного поля** $\vec{a}\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$.

Опр. **7.4.** **Вектор**, компоненты которого в системе координат $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ определяются формулой

$$\operatorname{rot} u = [\nabla,\ \vec{a}] = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{S_\delta} [\vec{n},\ \vec{a}]\, ds}{\int\limits_{V_\delta} dv} \tag{34}$$

мы будем называть **ротором векторного поля** $\vec{a}\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$.

Поскольку в этих определениях вводимые понятия определяются через поверхностные интегралы и интегралы по объёму, которые не зависят от системы координат, то данные определния действительно инвариантны относительно системы координат. Убедимся теперь, что в декартовой системе координат определяемые так понятия совпадают со стандартными градиентом, дивергенцией и ротором, а заодно выведем формулы для их вычисления в произвольной ортогональной системе координат.

Теорема **7.1 (Формулы** grad, div, rot **и** Δ **в криволинейных координатах).**
Усл. *Системы координат* (x^i) *с базисом* $\{\mathbf{e}_i\}$ *и* (ξ_i) *с базисом* $\{\mathbf{e}_{\xi_i}\}$ *связаны соотношениями* (24), $g = g_{11} g_{22} g_{33}$, *где параметры* g_{ii} *определены равенством* (25).
Утв.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}, \tag{35}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial \left(a_{\xi_1} \sqrt{g_{22}\ g_{33}}\right)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \left(a_{\xi_2} \sqrt{g_{11}\ g_{33}}\right)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \left(a_{\xi_3} \sqrt{g_{11}\ g_{22}}\right)}{\partial \xi_3} \right), \tag{36}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}}\ \mathbf{e}_{\xi_1} & \sqrt{g_{22}}\ \mathbf{e}_{\xi_2} & \sqrt{g_{33}}\ \mathbf{e}_{\xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ a_{\xi_1} \sqrt{g_{11}} & a_{\xi_2} \sqrt{g_{22}} & a_{\xi_3} \sqrt{g_{33}} \end{vmatrix} \tag{37}$$

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right) \tag{38}$$

$$(\vec{a},\ \nabla)\, u = \frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \tag{39}$$

Доказательство.
([1], Гл. 6, §7.) Во-первых заметим, что нам достаточно доказать выполнение равенств (35) – (37) для тела $V_\delta = MM_1N_2M_3M_2N_3NN_1$, изображённого на стр. 23. В качестве фиксированной точки $\overset{0}{M}$ мы возьмём точку M, а за δ примем длину максимального ребра $\delta = \max\{dl_1,\ dl_2,\ dl_3\}$. [1]

Докажем равенство (35). Первая координата вектора $\operatorname{grad} u$ – вдоль направления $\mathbf{e}_{\xi_1}$ – определяется так:

$$(\operatorname{grad} u)^1 = (\nabla u,\ \mathbf{e}_{\xi_1}) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\int\limits_{S_\delta} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right)}{\int\limits_{V_\delta} dv} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\left(\int\limits_{d\sigma_1} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right) + \left(\int\limits_{d\sigma_2} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right) + \left(\int\limits_{d\sigma_3} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right)}{\int\limits_{V_\delta} dv} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\int\limits_{M_1N_3NN_2} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right) + \left(\int\limits_{M_2N_3NN_1} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right) + \left(\int\limits_{M_3N_2NN_1} u\vec{n}ds,\ \ \mathbf{e}_{\xi_1}\right)}{\int\limits_{V_\delta} dv}\right) =$$

$$= \Big[\text{с учётом направления } \vec{n} \text{ для каждой из граней}\Big] = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_{M_1N_3NN_2} uds - \int\limits_{d\sigma_1} uds}{\int\limits_{V_\delta} dv} =$$

$$= \Big[\text{по теореме о среднем и пунктам 1)и 2) Утверждения 7.1}\Big] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(u(\tilde{M}_1) - u(\tilde{M})\right)\frac{\sqrt{g_{22}g_{33}}\ d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\ d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\left(u(\tilde{M}_1) - u(\tilde{M})\right)}{\sqrt{g_{11}}\ d\xi_1} =$$

$$= \Big[\tilde{M}_1 \approx M_1 \text{ – средняя точка грани } M_1N_3NN_2, \text{ а } \tilde{M} \approx M \text{ – средняя точка грани } d\sigma_1\Big] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{u\left(\xi_1 + d\xi_1,\ \xi_2, \xi_3\right) - u\left(\xi_1,\ \xi_2, \xi_3\right)}{\sqrt{g_{11}}\ d\xi_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}.$$

При переходе к последней строчке мы воспользовались возможностью сведения тройного предела к повторному однократному и сначала устремили $dl_2 \to 0$ и $dl_3 \to 0$, в результате получив, фактически, однократный предел при $dl_1 \to 0$, то есть при $M_1 \to M$ или при $d\xi_1 \to 0$.

[1] Это не вполне соответствует определению 7.2, поскольку $\overset{0}{M}$ должна быть внутренней точкой, а δ – расстоянием от $\overset{0}{M}$ до S_δ. Это несоответствие легко исправить, взяв параллелепипед с рёбрами вдвое большей длины, для которого M будет лежать в центре. Тогда $MM_1N_2M_3M_2N_3NN_1$ будет совпадать с одной восьмой частью большого параллелепипеда. Не делаем мы этого только чтобы избежать более сложных рисунков и некоторого увеличения громоздкости выкладок.

Аналогично устанавливаются равенства

$$(\operatorname{grad} u)^2 = \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, \qquad (\operatorname{grad} u)^3 = \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{33}}},$$

откуда следует справедливость формулы (35).

Докажем (36). Для этого рассмотрим интеграл от $(\vec{a},\ \vec{n})$ по паре противоположных граней нашего параллелепипеда:

$$\int\limits_{d\sigma_1 \cup M_1 N_3 N N_2} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds = \int\limits_{d\sigma_1} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds + \int\limits_{M_1 N_3 N N_2} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds =$$
$$= \Big[\text{с учётом направления } \vec{n} \text{ для каждой из граней}\Big] =$$
$$= \int\limits_{d\sigma_1} (\vec{a},\ -\mathbf{e}_{\xi_1})\, ds + \int\limits_{M_1 N_3 N N_2} (\vec{a},\ \mathbf{e}_{\xi_1})\, ds$$

Полагая, что $\vec{a}$ практически не меняется на гранях $d\sigma_1$ и $M_1 N_3 N N_2$ (то есть пренебрегая слагаемыми, стремящимися к нулю при $\delta \to 0$), мы получаем:

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{d\sigma_1 \cup M_1 N_3 N N_2} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds = \lim_{\delta \to 0} \left(-a_{\xi_1}(M) \int\limits_{d\sigma_1} ds \right) + \lim_{\delta \to 0} \left(a_{\xi_1}(M_1) \int\limits_{M_1 N_3 N N_2} ds \right) =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \left(-a_{\xi_1}(M) \sqrt{g_{22} g_{33}}\ d\xi_2 d\xi_3 + a_{\xi_1}(M_1) \sqrt{g_{22} g_{33}}\ d\xi_2 d\xi_3 \right) =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \left(a_{\xi_1}(M_1) - a_{\xi_1}(M) \right) \sqrt{g_{22} g_{33}}\ d\xi_2 d\xi_3.$$

Далее, поскольку

$$\left(a_{\xi_1}(M_1) - a_{\xi_1}(M) \right) \sqrt{g_{22} g_{33}} = \frac{\partial \left(a_{\xi_1} \sqrt{g_{22} g_{33}} \right)}{\partial \xi_1}\ d\xi_1 + \bar{\bar{o}}\left(d\xi_1 \right),$$

то

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\int\limits_{d\sigma_1 \cup M_1 N_3 N N_2} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds}{V_\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{\partial \left(a_{\xi_1} \sqrt{g_{22} g_{33}} \right)}{\partial \xi_1}\ d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{g}\ d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \left(a_{\xi_1} \sqrt{g_{22} g_{33}} \right)}{\partial \xi_1} \right).$$

Аналогично,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\int\limits_{d\sigma_2 \cup M_2 N_3 N N_1} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds}{V_\delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \left(a_{\xi_2} \sqrt{g_{11} g_{33}} \right)}{\partial \xi_2} \right),$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\int\limits_{d\sigma_3 \cup M_3 N_2 N N_1} (\vec{a},\ \vec{n})\, ds}{V_\delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \left(a_{\xi_3} \sqrt{g_{11} g_{22}} \right)}{\partial \xi_3} \right).$$

Сложив последние три равенства, получим (36).

Докажем (37). Пусть $\sigma-$ незамкнутая ограниченная гладкая поверхность с границей $\partial\sigma = L$ и нормалью $\vec{n}$. Выведем равенство:

$$\left([\nabla,\ \vec{a}],\ \ \vec{n} \right) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma} \oint\limits_{L} \vec{a} d\vec{l}. \tag{40}$$

Доказательство. По формуле Стокса,

$$\oint\limits_L \vec{a} d\vec{l} = \iint\limits_\sigma (\operatorname{rot} \vec{a},\ \vec{n})\ d\sigma.$$

По теореме о среднем для двойных интегралов найдётся такая точка $\tilde{M} \in \sigma$, что

$$\oint\limits_L \vec{a} d\vec{l} = (\operatorname{rot} \vec{a},\ \vec{n})\Big|_{(M)} \iint\limits_\sigma\ d\sigma = (\operatorname{rot} \vec{a},\ \vec{n})\Big|_{(M)} \cdot \sigma.$$

Перейдём к пределу при стремлении диаметра δ поверхности σ к нулю и получим требуемое равенство (40). □

Чтобы найти первую координату вектора $\operatorname{rot} \vec{a}$, применим (40), взяв в качестве $\sigma = d\sigma_1 = MM_2N_1M_3$, нормалью к этой грани является $\vec{n} = \mathbf{e}_{\xi_1}$, а её площадь $\sigma = \sqrt{g_{22}g_{33}} d\xi_2 d\xi_3$. Тогда:

$$\oint\limits_L \left(\vec{a},\ d\vec{l}\right) = \left(\int\limits_{MM_2} + \int\limits_{M_2N_1} + \int\limits_{N_1M_3} + \int\limits_{M_3M}\right)\left(\vec{a},\ d\vec{l}\right) =$$

$$= a_{\xi_2}\underbrace{\sqrt{g_{22}}\ d\xi_2}_{dl_2} + \left(a_{\xi_3}\underbrace{\sqrt{g_{33}}\ d\xi_3}_{dl_3} + \frac{\partial\left(a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}}\right)}{\partial\xi_2} d\xi_2 d\xi_3\right) +$$

$$+ \left(-a_{\xi_2}\underbrace{\sqrt{g_{22}}\ d\xi_2}_{dl_2} - \frac{\partial\left(a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}}\right)}{\partial\xi_3} d\xi_1 d\xi_2\right) - a_{\xi_3}\underbrace{\sqrt{g_{33}}\ d\xi_3}_{dl_3} + R =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_2} & \frac{\partial}{\partial\xi_3} \\ a_{\xi_2}\sqrt{g_{22}} & a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}} \end{vmatrix} d\xi_2 d\xi_3 + R,$$

где через R мы обозначили все слагаемые более высокого порядка малости.

Таким образом, из полученного равенства и (40),

$$(\operatorname{rot} \vec{a},\ \mathbf{e}_{\xi_1}) = \frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_2} & \frac{\partial}{\partial\xi_3} \\ a_{\xi_2}\sqrt{g_{22}} & a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}} \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$(\operatorname{rot} \vec{a},\ \mathbf{e}_{\xi_2}) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_3} & \frac{\partial}{\partial\xi_1} \\ a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}} & a_{\xi_1}\sqrt{g_{11}} \end{vmatrix}, \qquad (\operatorname{rot} \vec{a},\ \mathbf{e}_{\xi_3}) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_1} & \frac{\partial}{\partial\xi_3} \\ a_{\xi_1}\sqrt{g_{11}} & a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}} \end{vmatrix}.$$

Объединив три последние равенства, получим (37).
Теперь докажем (38). Для этого используем тождество

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

в котором, поскольку оператор Лапласа выражен только через операции div и grad , которые определены в Опр. 7.3 и 7.2 инвариантным образом, и сам оператор Лапласа также определён инвариантно относительно системы ортогональных координат.
Применим уже доказанные равенства (35)–(36):

$$\Delta u = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\mathbf{e}_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\mathbf{e}_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\sqrt{g_{22}\,g_{33}}\right)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\mathbf{e}_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\sqrt{g_{11}\,g_{33}}\right)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3}\cdot\frac{\mathbf{e}_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\right)}{\partial \xi_3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi_3}\right)\right).$$

Докажем (39) другим способом, чтобы проиллюстрировать иной путь вывода подобных формул. Воспользуемся формулой (27):

$$\mathbf{e}_{\xi_i} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}\,\mathbf{e}_j \tag{27}$$

для того, чтобы "в лоб" проверить выполнение равенства (39). В первую очередь выведем соотношения координат вектора $\vec{a}$ в исходном базисе $\{\mathbf{e}_j\}$ и в новом базисе $\{\mathbf{e}_{xi_i}\}$.

$$\vec{a} = a^j\mathbf{e}_j = a_{\xi_i}\mathbf{e}_{\xi_i} = \Big[\text{в силу (27)}\Big] = \frac{a_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}\,\mathbf{e}_j,$$

откуда

$$a^j = \frac{a_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}. \tag{41}$$

Теперь преобразуем правую часть доказываемого равенства (39).

$$\frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_3} = \left[\text{поскольку } \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = \frac{\partial u}{\partial x^j}\cdot\frac{x^j}{\partial \xi_i}\right] =$$

$$= \frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\cdot\frac{x^j}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\cdot\frac{x^j}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\cdot\frac{x^j}{\partial \xi_3} = \Big[\text{перегруппируем слагаемые}\Big] =$$

$$= \left(\frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{x^1}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{x^1}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\,\frac{x^1}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \left(\frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{x^2}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{x^2}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\,\frac{x^2}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x^2} +$$

$$+ \left(\frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{x^3}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{x^3}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\,\frac{x^3}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x^3} = \Big[\text{используем обозначения Эйнштейна}\Big] =$$

$$= \frac{a_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^1}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{a_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^2}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{a_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial x^3}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^3} = \Big[\text{в силу (41)}\Big] =$$

$$= a^1\frac{\partial u}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial u}{\partial x^2} + a^3\frac{\partial u}{\partial x^3} = (\vec{a},\ \nabla)\,u.$$

□

Замечание 7.1. Формулы (35) – (37) выводились для ортогональных систем координат. Если в качестве такой новой системы координат взять обычную декартову прямоугольную систему координат, то мы получим:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g = 1,$$

и для вычисления градиента, дивергенции и ротора мы получим формулы, полностью совпадающие с обычными. Таким образом, определения 7.2 – 7.4 оказались корректными, так как привели нас в ранее изученном частном случае декартовой прямоугольной системы координат к стандартным формулам для вычисления операций векторного анализа.

Иной способ вывода этих формул из определений 7.2 – 7.4 изложен в [3], Гл. 6, §3, стр. 159–168.

7.3 Набла в криволинейных координатах.

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}\}$ координаты a^1, a^2, a^3, а в базисе $\{\mathbf{e}_\xi\}$ – координаты a_{ξ_1}, a_{ξ_2}, a_{ξ_3}:

$$\vec{a} = a^i\, \mathbf{e}_i = a_{\xi_i}\, \mathbf{e}_{\xi_i}.$$

Выпишем формулы (35) – (39), выведенные в предыдущем пункте.

Операция	Через ∇	В базисе $\{\mathbf{e}\}$	В криволинейных координатах $\{\mathbf{e}_\xi\}$
$\operatorname{grad} u$	$\nabla\, u$	$\frac{\partial u}{\partial x^i}\, \mathbf{e}_i$	$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\xi_i}}{\sqrt{g_{ii}}}$
$\operatorname{div} \vec{a}$	$(\nabla,\ \vec{a})$	$\frac{\partial a^i}{\partial x^i}$	$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial\left(a_{\xi_1}\sqrt{g_{22}\, g_{33}}\right)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial\left(a_{\xi_2}\sqrt{g_{11}\, g_{33}}\right)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial\left(a_{\xi_3}\sqrt{g_{11}\, g_{22}}\right)}{\partial \xi_3} \right)$
$\operatorname{rot} \vec{a}$	$[\nabla,\ \vec{a}]$	$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}}\, \mathbf{e}_{\xi_1} & \sqrt{g_{22}}\, \mathbf{e}_{\xi_2} & \sqrt{g_{33}}\, \mathbf{e}_{\xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ a_{\xi_1}\sqrt{g_{11}} & a_{\xi_2}\sqrt{g_{22}} & a_{\xi_3}\sqrt{g_{33}} \end{vmatrix}$
Δu	$(\nabla,\ \nabla u)$	$\frac{\partial^2 u}{(\partial \xi_i)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right)$
	$(\vec{a},\ \nabla)\, u$	$a^i\, \frac{\partial u}{\partial x^i}$	$\frac{a_{\xi_1}}{\sqrt{g_{11}}}\, \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{a_{\xi_2}}{\sqrt{g_{22}}}\, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{a_{\xi_3}}{\sqrt{g_{33}}}\, \frac{\partial u}{\partial \xi_3}$

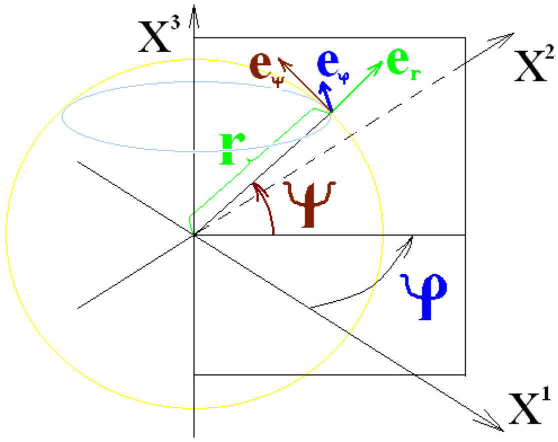
7.4 Примеры ортогональных систем координат.

7.4.1 Сферические координаты I.

Пусть $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (r,\ \varphi,\ \psi)$, и связь между $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $(r,\ \varphi,\ \psi)$ задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi\cos\psi \\ x^2 = r\sin\varphi\cos\psi \\ x^3 = r\sin\psi \end{cases} \qquad (42)$$

Заданная таким образом тройка $(r,\ \varphi,\ \psi)$ является правой.



Вычислим $g_{11} = g_{rr},\quad g_{22} = g_{\varphi\varphi},\quad g_{33} = g_{\psi\psi}$ и g:

$$g_{rr} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial r}\right)^2 = (\cos\varphi\cos\psi)^2 + (\sin\varphi\cos\psi)^2 + (\sin\psi)^2 = 1;$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \varphi}\right)^2 = (-r\sin\varphi\cos\psi)^2 + (r\cos\varphi\cos\psi)^2 + (0)^2 = r^2\cos^2\psi;$$

$$g_{\psi\psi} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \psi}\right)^2 = (-r\cos\varphi\sin\psi)^2 + (-r\cos\varphi\sin\psi)^2 + (\cos\psi)^2 = r^2;$$

$$g = g_{rr}g_{\varphi\varphi}g_{\psi\psi} = r^4\cos^2\psi \equiv \left|\frac{D\,(x^1,\ x^2,\ x^3)}{D\,(r,\ \varphi,\ \psi)}\right|^2.$$

Пользуясь формулой (35), получаем:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\psi}{\sqrt{g_{\psi\psi}}} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\mathbf{e}_r + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\cos\psi} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\psi}{r}.$$

Формула (36) даёт:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\left(\frac{\partial\left(a_r\cdot\sqrt{g_{\varphi\varphi}\ g_{\psi\psi}}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(a_\varphi\cdot\sqrt{g_{rr}\ g_{\psi\psi}}\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(a_\psi\cdot\sqrt{g_{rr}\ g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial \psi}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2\cos\psi}\cdot\left(\frac{\partial\left(a_r\cdot r^2\cos\psi\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(a_\varphi\cdot r\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(a_\psi\cdot r\cos\psi\right)}{\partial \psi}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(a_r\cdot r^2\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\cos\psi}\cdot\frac{\partial\left(a_\psi\cdot\cos\psi\right)}{\partial \psi}.$$

Из формулы (37) имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{g_{rr}}\ \mathbf{e}_r & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\ \mathbf{e}_\varphi & \sqrt{g_{\psi\psi}}\ \mathbf{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ a_r\sqrt{g_{rr}} & a_\varphi\sqrt{g_{\varphi\varphi}} & a_\psi\sqrt{g_{\psi\psi}} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\cos\psi}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\cos\psi\ \mathbf{e}_\varphi & r\ \mathbf{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ a_r & a_\varphi r\cos\psi & a_\psi r \end{vmatrix}$$

Далее, по формуле (38):

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{rr}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{r^2 \cos\psi} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cos\psi \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos\psi \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2\psi} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos\psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos\psi \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right).$$

Наконец, формула (39) даёт:

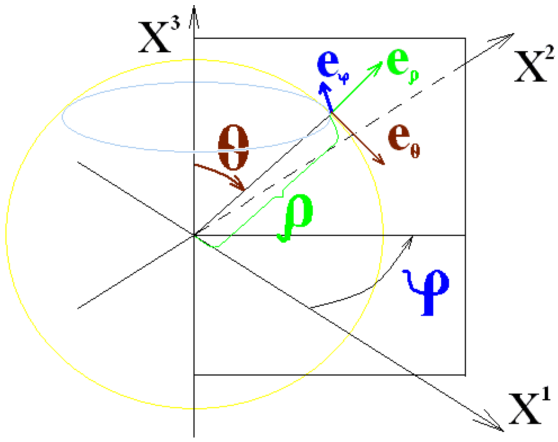
$$(\vec{a},\ \nabla)\, u = \frac{a_r}{\sqrt{g_{rr}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{a_\psi}{\sqrt{g_{\psi\psi}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} = a_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r\cos\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{a_\psi}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi}.$$

7.4.2 Сферические координаты II.

Часто используется другой вариант сферических координат: пусть $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (\rho,\ \theta,\ \varphi)$, и связь между $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ x^2 = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ x^3 = \rho \cos\theta \end{cases} \qquad (43)$$

Заданная таким образом тройка $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ является правой.



Вычислим $g_{11} = g_{\rho\rho}$, $g_{22} = g_{\theta\theta}$, $g_{33} = g_{\varphi\varphi}$ и g:

$$g_{\rho\rho} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \rho}\right)^2 = (\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2 = 1;$$
$$g_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \theta}\right)^2 = (\rho\cos\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-\rho\sin\theta)^2 = \rho^2;$$
$$g_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \varphi}\right)^2 = (-\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (0)^2 = \rho^2\sin^2\theta;$$
$$g = g_{\rho\rho} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi} = \rho^4 \sin^2\theta \equiv \left| \frac{D\,(x^1,\ x^2,\ x^3)}{D\,(\rho,\ \theta,\ \varphi)} \right|^2.$$

Пользуясь формулой (35), получаем:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\mathbf{e}_\rho}{\sqrt{g_{\rho\rho}}} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\mathbf{e}_\theta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho\sin\theta}.$$

Формула (36) даёт:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial\left(a_\rho \cdot \sqrt{g_{\theta\theta}\, g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial \rho} + \frac{\partial\left(a_\theta \cdot \sqrt{g_{\rho\rho}\, g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(a_\varphi \cdot \sqrt{g_{\rho\rho}\, g_{\theta\theta}}\right)}{\partial \varphi} \right) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \cdot \left(\frac{\partial\left(a_\rho \cdot \rho^2 \sin\theta\right)}{\partial \rho} + \frac{\partial\left(a_\theta \cdot \rho\sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(a_\varphi \cdot \rho\right)}{\partial \varphi} \right) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial\left(a_\rho \cdot \rho^2\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta} \cdot \frac{\partial\left(a_\theta \cdot \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Из формулы (37) имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{g_{\rho\rho}}\,\mathbf{e}_\rho & \sqrt{g_{\theta\theta}}\,\mathbf{e}_\theta & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_\rho\sqrt{g_{\rho\rho}} & a_\theta\sqrt{g_{\theta\theta}} & a_\varphi\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\,\mathbf{e}_\theta & \rho\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_\rho & a_\theta\rho & a_\varphi\rho\sin\theta \end{vmatrix}$$

Далее, по формуле (38):

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\rho\rho}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\theta\theta}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2\sin\theta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Наконец, формула (39) даёт:

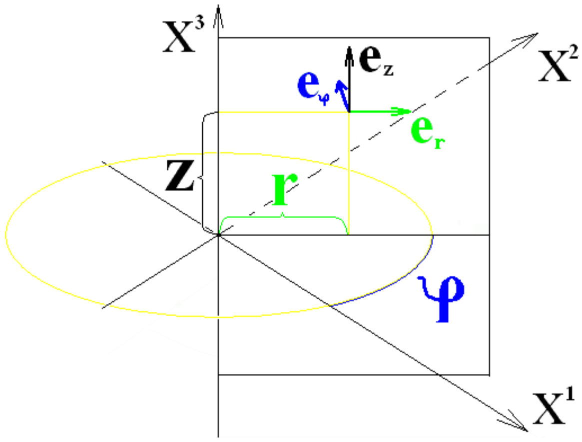
$$(\vec{a},\ \nabla)\,u = \frac{a_\rho}{\sqrt{g_{\rho\rho}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{a_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{a_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial\varphi} = a_\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{a_\theta}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{a_\varphi}{\rho\sin\theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

7.4.3 Цилиндрические координаты.

Пусть $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (r,\ \varphi,\ z)$, и связь между $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $(r,\ \varphi,\ z)$ задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \\ x^3 = z \end{cases} \tag{44}$$

Заданная таким образом тройка $(r,\ \varphi,\ z)$ является правой.



Вычислим $g_{11} = g_{rr}$, $g_{22} = g_{\varphi\varphi}$, $g_{33} = g_{zz}$ и g:

$$g_{rr} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial r}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0^2 = 1;$$
$$g_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial\varphi}\right)^2 = (-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2 + 0^2 = r^2;$$
$$g_{zz} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial z}\right)^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1;$$
$$g = g_{rr}g_{\varphi\varphi}g_{zz} = r^2 \equiv \left|\frac{D\,(x^1,\ x^2,\ x^3)}{D\,(r,\ \varphi,\ z)}\right|^2.$$

Пользуясь формулой (35), получаем:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\mathbf{e}_z}{\sqrt{g_{\psi\psi}}} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z .$$

Формула (36) даёт:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial \left(a_r \cdot \sqrt{g_{\varphi\varphi}\, g_{zz}}\right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(a_\varphi \cdot \sqrt{g_{rr}\, g_{zz}}\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \left(a_z \cdot \sqrt{g_{rr}\, g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial (a_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (a_z \cdot r)}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (a_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (a_z)}{\partial z} .\end{aligned}$$

Из формулы (37) имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{g_{rr}}\ \mathbf{e}_r & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\ \mathbf{e}_\varphi & \sqrt{g_{zz}}\ \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r \sqrt{g_{rr}} & a_\varphi \sqrt{g_{\varphi\varphi}} & a_z \sqrt{g_{zz}} \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\ \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & a_\varphi r & a_z \end{vmatrix}$$

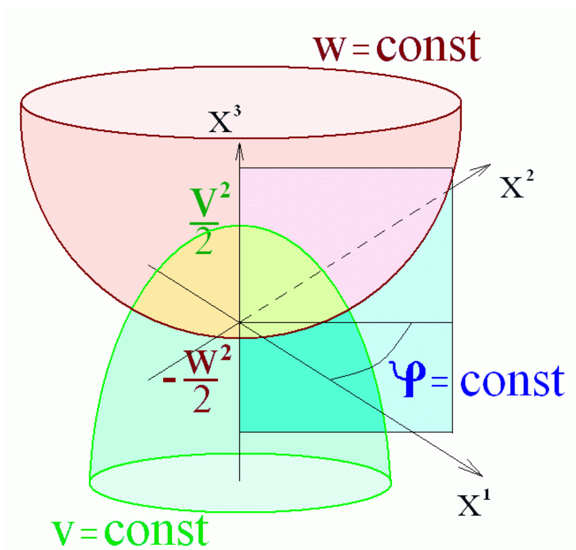
Далее, по формуле (38):

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{rr}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{zz}} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .\end{aligned}$$

Наконец, формула (39) даёт:

$$(\vec{a},\ \nabla)\, u = \frac{a_r}{\sqrt{g_{rr}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{a_z}{\sqrt{g_{zz}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = a_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} .$$

7.4.4 Параболические координаты.

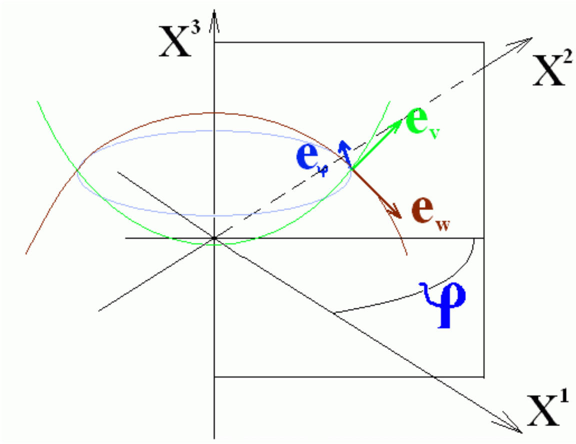


Пусть $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (v,\ w,\ \varphi)$, и связь между $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и $(v,\ w,\ \varphi)$ задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = vw \cos\varphi \\ x^2 = vw \sin\varphi \\ x^3 = \frac{1}{2} \cdot (v^2 - w^2) \end{cases} \tag{45}$$

На первом рисунке изображены поверхности уровней для этой системы координат, на втором – базисные вектора в некоторой точке.

Заданная таким образом тройка $(v,\ w,\ \varphi)$ является правой. Здесь v и w меняются на $[0,\ +\infty)$, а $\varphi \in [0,\ 2\pi)$.



Вычислим $g_{11} = g_{vv},\ \ g_{22} = g_{ww},\ \ g_{33} = g_{\varphi\varphi}$ и g:

$$g_{vv} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial v}\right)^2 = (w\cos\varphi)^2 + (w\sin\varphi)^2 + (v)^2 = v^2 + w^2;$$

$$g_{ww} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial w}\right)^2 = (v\cos\varphi)^2 + (v\sin\varphi)^2 + (-w)^2 = v^2 + w^2;$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \varphi}\right)^2 = (-vw\sin\varphi)^2 + (vw\cos\varphi)^2 + 0^2 = v^2w^2;$$

$$g = g_{vv}g_{ww}g_{\varphi\varphi} = v^2w^2\left(v^2+w^2\right)^2 \equiv \left|\frac{D\left(x^1,\ x^2,\ x^3\right)}{D\left(v,\ w,\ \varphi\right)}\right|^2.$$

Пользуясь формулой (35), получаем:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\mathbf{e}_v}{\sqrt{g_{vv}}} + \frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\mathbf{e}_w}{\sqrt{g_{ww}}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\mathbf{e}_v}{v^2+w^2} + \frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\mathbf{e}_w}{v^2+w^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{v^2w^2}.$$

Формула (36) даёт:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\left(\frac{\partial\left(a_v\cdot\sqrt{g_{ww}\ g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(a_w\cdot\sqrt{g_{vv}\ g_{\varphi\varphi}}\right)}{\partial w} + \frac{\partial\left(a_\varphi\cdot\sqrt{g_{vv}\ g_{ww}}\right)}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{vw\left(v^2+w^2\right)}\cdot\left(\frac{\partial\left(a_v\cdot vw\sqrt{v^2+w^2}\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(a_w\cdot vw\sqrt{v^2+w^2}\right)}{\partial w} + \frac{\partial\left(a_\varphi\cdot\left(v^2+w^2\right)\right)}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{v\left(v^2+w^2\right)}\cdot\frac{\partial\left(a_v\cdot v\sqrt{v^2+w^2}\right)}{\partial v} + \frac{1}{w\left(v^2+w^2\right)}\cdot\frac{\partial a_w\cdot w\sqrt{v^2+w^2}}{\partial w} + \frac{1}{vw}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Из формулы (37) имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{g_{vv}}\,\mathbf{e}_r & \sqrt{g_{ww}}\,\mathbf{e}_\varphi & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_v\sqrt{g_{vv}} & a_w\sqrt{g_{ww}} & a_\varphi\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{vw\,(v^2+w^2)} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{v^2+w^2}\,\mathbf{e}_v & \sqrt{v^2+w^2}\,\mathbf{e}_w & vw\,\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_v\cdot\sqrt{v^2+w^2} & a_w\cdot\sqrt{v^2+w^2} & a_\varphi\cdot vw \end{vmatrix}$$

Далее, по формуле (38):

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{vv}}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ww}}\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{vw\,(v^2+w^2)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(vw\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(vw\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v^2+w^2}{vw}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{v\,(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{1}{w\,(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(w\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\right) + \frac{1}{v^2w^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Наконец, формула (39) даёт:

$$(\vec{a},\ \nabla)\,u = \frac{a_v}{\sqrt{g_{vv}}}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{a_w}{\sqrt{g_{ww}}}\cdot\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{a_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{a_v}{\sqrt{v^2+w^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{a_w}{\sqrt{v^2+w^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{a_\varphi}{vw}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Замечание 7.2. Примеры других ортогональных систем координат и формул операций векторного анализа в них см. [4], раздел 6.5. Там, кроме рассмотренных выше, приведены координаты

—вытянутого эллипсоида вращения;
—сплюснутого эллипсоида вращения;
—эллиптического цилиндра;
—конические;
—параболоидальные;
—параболического цилиндра;
—бицилинрические;
—тороидальные;
—биполярные.

Операция	Декартовы	Сферические – I
grad u	$\frac{\partial u}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_i$	$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\mathbf{e}_r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\cos\psi}+\frac{\partial u}{\partial\psi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\psi}{r}$
div $\vec{a}$	$\frac{\partial a^i}{\partial x^i}$	$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(a_r\cdot r^2\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\psi}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\cos\psi}\cdot\frac{\partial\left(a_\psi\cdot\cos\psi\right)}{\partial\psi}$
rot $\vec{a}$	$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3}\\ a^1 & a^2 & a^3\end{vmatrix}$	$\frac{1}{r^2\cos\psi}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\cos\psi\,\mathbf{e}_\varphi & r\,\mathbf{e}_\psi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\psi}\\ a_r & a_\varphi r\cos\psi & a_\psi r\end{vmatrix}$
Δu	$\frac{\partial^2 u}{(\partial\xi_i)^2}$	$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\cos^2\psi}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos\psi}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\cdot\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$
$(\vec{a},\ \nabla)$	$a^i\,\frac{\partial u}{\partial x^i}$	$a_r\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{a_\varphi}{r\cos\psi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{a_\psi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\psi}$

Операция	Сферические – II	Цилиндрические
grad u	$\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\mathbf{e}_\rho+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\mathbf{e}_\theta}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho\sin\theta}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\mathbf{e}_r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\mathbf{e}_z$
div $\vec{a}$	$\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial\left(a_\rho\cdot\rho^2\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial(a_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$	$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(a_r\cdot r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(a_z)}{\partial z}$
rot $\vec{a}$	$\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\,\mathbf{e}_\theta & \rho\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ a_\rho & a_\theta\rho & a_\varphi\rho\sin\theta\end{vmatrix}$	$\frac{1}{r}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\,\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_r & a_\varphi r & a_z\end{vmatrix}$
Δu	$\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$ $+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$	$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
$(\vec{a},\ \nabla)$	$a_\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{a_\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{a_\varphi}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$	$a_r\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{a_\varphi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}+a_z\,\frac{\partial u}{\partial z}$

Операция	Параболические
grad u	$\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\mathbf{e}_v}{v^2+w^2}+\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\mathbf{e}_w}{v^2+w^2}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\mathbf{e}_\varphi}{v^2w^2}$
div $\vec{a}$	$\frac{1}{v(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial\left(a_v\cdot v\sqrt{v^2+w^2}\right)}{\partial v}+\frac{1}{w(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial a_w\cdot w\sqrt{v^2+w^2}}{\partial w}+\frac{1}{vw}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$
rot $\vec{a}$	$\frac{1}{vw(v^2+w^2)}\cdot\begin{vmatrix}\sqrt{v^2+w^2}\,\mathbf{e}_v & \sqrt{v^2+w^2}\,\mathbf{e}_w & vw\,\mathbf{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ a_v\cdot\sqrt{v^2+w^2} & a_w\cdot\sqrt{v^2+w^2} & a_\varphi\cdot vw\end{vmatrix}$
Δu	$\frac{1}{v(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right)+\frac{1}{w(v^2+w^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(w\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\right)+\frac{1}{v^2w^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$
$(\vec{a},\ \nabla)$	$\frac{a_v}{\sqrt{v^2+w^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{a_w}{\sqrt{v^2+w^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial w}+\frac{a_\varphi}{vw}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}$

Список литературы

[1] **Будак Б.М., Фомин С.В.** *Кратные интегралы и ряды*

[2] **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** *Линейная алгебра*//М., ФизМатЛит, 2002. 317 с.

[3] **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** *Основы математического анализа. Часть II.*// М., ФизМатЛит, 2000. 447 с.

[4] **Корн Г., Корн Т.** *Справочник по математике для научных работников и инженеров*// М., Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. 720 с.

[5] **Постников М.М.** *Лекции по геометрии. Семестр II.* Линейная алгебра//М., Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 400 с.

Глоссарий

Содержание